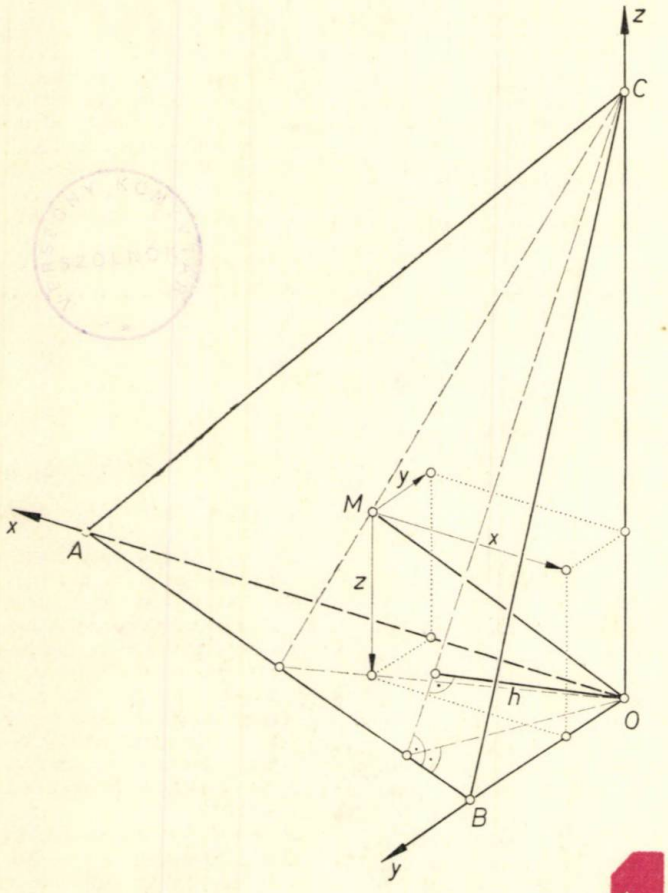
A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



1989. XXXVI. évfolyam 1 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
URBÁN JÁNOS

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:
ÁCS PÁL, ELŐD ISTVÁNNÉ, HÓDI ENDRE. DR. KOLLER LÁSZLÓNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, LAJOS JÓZSEFNÉ, NÉMETHY KATALIN, PÁLMAY LÓRÁNT, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZENDREI JULIANNA, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

88-4410 — Szegedi Nyomda
F. v.: Surányi Tibor igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 42,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 7,— Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő adatokat is:
a) személyi számukat, *b)* asszonyok leánykori nevüket, *c)* lakáscímüket — irányítószámmal, *d)* foglalkozásukat (beosztásukat), *e)* munkahelyük pontos megnevezését (nyugdíjasok törzsszámukat), *f)* munkahelyük címét — irányítószámmal.

TARTALOM

Kőrösné Mikis Márta: Algoritmus — folyamatábra — program 1
Bencze Mihály: Az „e" számmal kapcsolatos egyenlőtlenségek 6
Mihalovics Sándor: Egyszerű kapcsolatok a binomiális együtthatók között 13
Szabóné Gábris Rita: Tanulmány Simonovits Miklós: Számítástechnika c. tankönyvének tanításáról 16
Almási Lászlóné: Néhány gondolat a számítástechnikai táborokról 19
Hubert Tibor: Egy számítástechnikai feladatgyűjteményről 22
Antal Gábor: Könyvismertetés 23
Dr. Ábrahám István—Csécs Miklós: A matematika felvételi vizsgáról 24
FELADATOK 28

INHALT

Kőrösné Mikis Márta: Algorithmus — Vorgangsschema—Programm 1
Bencze Mihály: Ungleichungen in Verbindung mit der „*e*"-Ziffer 6
Mihalovics Sándor: Einfache Verbindungen zwischen den Binomialkoeffizienten..... 13
Szabóné Gábris Rita: Ein Aufsatz über den Unterricht nach dem Lehrbuch „Rechentechnik" von Simonovits Miklós 16
Almási Lászlóné: Einige Gedanken über die Lager für Rechentechnik 19
Hubert Tibor: Über eine Aufgabensammlung in Rechentechnik 22
Antal Gábor: Buchrezension 23
Dr. Ábrahám István—Csécs Miklós: Über die Aufnahmeprüfung in Mathematik .. 24
AUFGABEN 28

СОДЕРЖАНИЕ

Кёрёшнэ Микиш Марта: Алгоритм — схема — программа 1
Бенце Михай: Неравенства, связанные с числом «e» 6
Михалович Шандор: Простые связи между биномиальными сомножителями.. 13
Сабонэ Габриш Рита: Очерк об обучении по учебнику Шимоновича Миклоша «Вычислительная техника» 16
Алмаши Ласлонэ: Некоторые размышления о лагерях, где обучают детей вычислительной технике 19
Хуберт Тибор: Об одном сборнике по вычислительной технике 22
Антал Габор: Рецензия на книгу 23
Д-р Абрахам Иштван—Чеч Миклош: О вступительном экзамене по математике 24
РАЗДЕЛ ЗАДАНИЙ 28

KŐRÖSNÉ MIKIS MÁRTA
tudományos munkatárs
OPI, Budapest

Algoritmus — folyamatábra — program*

Algoritmus

Feladatok megoldásakor az egymás utáni lépések sorozatával megadott eljárást *algoritmusnak* nevezzük. Maga a szó egy IX. században élt arab matematikus, *Muhhamed ibn Muza al-Hvarizmi* nevéből származik, illetve vezetéknevének latin átírásából. Ugyanígy az algebra szó is az ő nevéből ered. Al-Hvarizmi könyvet írt (latin címe: Algoritmi dicit), melyben korának legfontosabb számolási eljárásait foglalta össze, mintegy „receptet" adva a felhasználóknak [1]. Milyen fontosnak nevezhető számításokra volt szükség ebben a korban? Például területszámításokra, építészeti, csillagászati számításokra, sőt, az említett mű még másodfokú egyenletek megoldására is mutatott eljárást.

Az ember ősidők óta törekedett a monoton és nehéz munkák megkönnyítésére, „gépesítésére". A technikai találmányok születését mindig ez ösztönözte. A számítások is bonyolult műveletek, különösen, ha nem ismerjük a feladat algoritmusát. Az első, számolást segítő eszköz az abakusz volt, amely bár másmás kivitelben, de szinte egy időben jelent meg a világ különböző tájain. Drótra fűzött golyós változatát van, ahol ma is használják. Mégis, amíg az indiai eredetű ún. arab számok, a helyiérték-rendszer és a számítások Al-Hvarizmi által javasolt algoritmusai el nem terjedtek, abakusz segítségével a szorzás, az osztás, sőt a bonyolultabb műveletek elvégzése komoly feladat maradt. (Gondoljuk el, mi lenne, ha a helyiérték-rendszert nem ismerő római számírással kellene nehezebb számításokat végeznünk!) Ennek ellenére az algoritmussal történő, igen praktikus számítási módszerek nagyon nehezen, csak több évszázad elteltével lettek népszerűek. Egy 1504-ből származó középkori metszeten Aritmetika istenasszony pillantást sem vet az abakusszal dolgozó Püthagoraszra, de mosolyával tünteti ki az algoritmussal számoló Boethiust. A metszet a régebbi kiadású, Sain Márton által írt Matematikatörténeti ABC címlapjáról jól ismert, de megtalálható [1]-ben is, ahol az algoritmus—abakusz harc részleteivel is megismerkedhetünk.

Napjainkban — különösen a számítógépek oktatási alkalmazása kapcsán — ismét egyre többet hallhatunk az algoritmusról, illetve az algoritmikus gondolkodás fejlesztéséről. Ne csak a matematika területén nézzünk körül! Számtalan, a mindennapi életben nap mint nap adódó olyan feladat van, mely meghatározott algoritmus szerint végezhető el. (Például: telefonálás, asztalterítés, átkelés az úttesten stb., l.: [2], [3].) Már a legkisebbekkel is el lehet meséltetni, meg lehet fogalmazni egy-egy folyamat algoritmusát. Sajnos, ma az általános iskolában kész helyzet elé állítjuk a tanulókat azáltal, hogy kész eljárásokat tanítunk és nem foglalkozunk eleget a

* Előadásként elhangzott kibővített formában a Komárom megyei általános iskolai matematikatanárok továbbképzésén, Tatabányán, 1988. november 8-án.

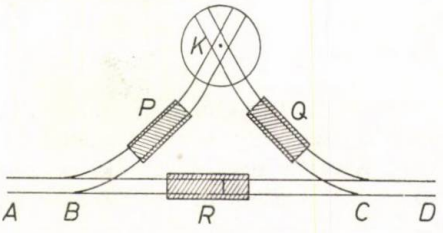
problémák megoldásához vezető algoritmusok felismerésével. Matematikaórákon legtöbbször valamilyen mennyiség meghatározása vagy tétel bizonyítása a cél. Kevés olyan feladatot találunk, amely egy-egy esemény folyamatábrájának elkészítését kívánja, bár az alsótagozatos matematika és környezetismeret tárgyakban adódik erre példa. Nagyobb teret lehetne biztosítani az ún. „algofejtörők" oktatási alkalmazásának is, melyhez ajánlásokat találhatunk [4]-ben.

Algofejtörők

A hagyományos fejtörőirodalom számos olyan feladványt ismer, amelyek megoldásához nem számítógépre vagy más technikai eszközre, hanem csupán a józan észre, pontosan megfogalmazott algoritmusokra van szükség. A kecske—káposzta—farkas problémát (és egyéb változatait) jól ismerjük, már alsó tagozaton is izgalmas feladat a megoldáshoz vezető algoritmus keresése. Ismét más fejtörőcsoportba sorolhatók a hamis pénz kiválasztásával és a folyadékok különféle űrtartalmú edényekbe való széttöltésével kapcsolatos, mérésekre visszavezethető feladatok [5].

Kicsiknél és nagyoknál egyaránt élvezetes az ún. „vasutas" feladatok megoldása, melyekben vasúti kocsikat, mozdonyokat kell rendezni különféle sínpárokon, más-más szempont szerint. Csupán egyetlen feladatot mutatnánk most meg, hasonlóak és egyéb konkrét algofejtörők megtalálhatók [4]-ben, amelyeknek elolvasását az érdeklődőknek feltétlenül ajánljuk. Az alábbi, idézett példa érdekessége, hogy *Kőnig Dénes* 1905-ben megjelent *„Matematikai mulatságok"* című könyvében éppúgy megtalálható, mint kései utódja a *Scientific American* Magyarországon *„Tudomány"* címmel megjelenő 1987/8. számában (Észjáték-rovat). Íme a feladat:

„Az *ABCD* sínpárt a forgó *K* koronggal két sínpár, *BK* és *CK* köt össze. A *K* korong arra való, hogy a *BK* sínpárról a *KC* sínpárra (vagy fordítva) vigye a vasúti kocsikat. A hosszabb lokomotív azonban már nem fér el rajta. Egy *P*-vel jelölt kocsi a *BK* sínen, egy másik, *Q* a *CK* sínen van, az *R* lokomotív pedig a *B* és *C* közti sínpáron áll. Kérdés, hogy miképp viheti az említett feltételek mellett az *R* lokomotív a *P* kocsit a *Q* helyére, *Q*-t pedig a *P* helyére."



Hasonló érdekes feladatokat találhatunk a *Tudomány* 1987/9—12. és 1988/1. számaiban.

Az OPI Számítástechnikai Programirodája kutatási program keretében 12 részes programcsomagot dolgozott ki és hozott forgalomba megfelelő írásos dokumentációval, melynek egyik témaköre: Algoritmusok, játékok. A programcsomag matematikai tanulságokkal teli feladatokon keresztül mutatja be az algoritmizálás és a programozás közötti kapcsolatot.

Feladatmegoldás számítógéppel

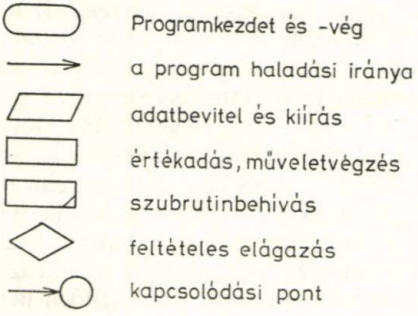
Az algoritmuskészítés, a folyamatábra felrajzolása ma egyre inkább a számítástechnikai ismeretek oktatása során kerül előtérbe. Az általános iskolák közel egyharmadában számítástechnikai fakultáció van, és úgyszólván minden számítógéppel rendelkező általános iskolában számítástechnikai szakkör is működik. Hazánkban éppúgy, mint minden más országban, legelőször a matematikatanárok kerültek kapcsolatba az iskolai számítástechnikával, zömében ma is ők az iskolai számítógépek „gazdái" avagy „felelősei", őket követik a technika, majd más természettudományos tárgyak tanárai. Az ún. humán területeken ma

még a számítógépek iskolai alkalmazása nem számottevő.

Nemcsak a matematikaórák, hanem a számítástechnika-órák is kiválóan alkalmasak a problémamegoldásra, az algoritmikus gondolkodásmód fejlesztésére. A tanár által adott feladat a tanulónak mindaddig problémaként jelenik meg, amíg nem ismert számára a megoldáshoz vezető út, az algoritmus. A Magyar Értelmező Szótár szerint a feladat „kötelességszerűen elvégzendő dolog", míg a probléma „megoldásra váró elméleti, gyakorlati kérdés, fejtörést okozó gond". A tanulókat állítsuk problémák elé! Ebből kiindulva, ezt elemezve, részekre bontva, esetleg több variációs lehetőséget figyelembe véve próbáljuk megkeresni a megoldáshoz vezető algoritmust! Programozási ismeretek oktatása esetén is mindig egy motiváló célú feladatból induljunk ki!

A folyamatábra szerepe

Az algoritmus megfogalmazása esetén rajzoljuk fel a hozzá tartozó folyamatábrát! A folyamatábra jelölései jól ismertek *(l. ábrát!)*. (Készítéséhez részletesebb, hasznos tanácsokat találhatunk [6]-ban.) Mégis, sajnos megszokott dolog, hogy a tanulók a feladat átgondolása nélkül rögtön a programíráshoz kezdenek hozzá, egymás után születnek a BASIC-sorok, a meggondolás nélkül írt „programtorzók", melyek tökéletessé tétele, javítgatása nemcsak hogy sok időt vesz igénybe, hanem eltereli a figyelmet a valódi feladatról.



Ne erőltessük minden egyszerű esetben a folyamatábrák készítését, de ne is hagyjuk el, ha szükségesek. A folyamatábrának olyannak kell lennie, hogy az így szemléletessé tett feladatot később bármely programnyelven (BASIC, LOGO, PASCAL stb.) meg lehessen fogalmazni az adott számítógép számára. Helytelen, ha a folyamatábra idomaiba magyar szavak vagy ezek rövidítései helyett rögtön BASIC-utasítások kerülnek. Az ilyen folyamatábrák (amelyek szépszámmal találhatók a jelenleg mindenütt használt [7]-ben is) hamisak, mivel az adott programnyelv utasításait és nem a feladat értelemszerű lépéseit mutatják. A folyamatábra programnyelvtől független kell, hogy legyen!

Meglepő, hogy a tanulók mennyire nem szoktak hozzá a feladat folyamatábrájának legalább vázlatos felrajzolásához. Főképp a számítástechnikai versenyeken tapasztaljuk ezt. A szakmunkástanulók országos számítástechnikai tanulmányi versenyének döntőjében például évek óta követelmény az adott, komolyabb feladat folyamatábrájának elkészítése. A tanulók tudják, hogy ezért értékes pontokat szerezhetnek. Mégis elmaradnak a folyamatábrák, vagy látszólag utólag készülnek el, azaz a programírást valójában nem segítik. Belátjuk, hogy sokkal izgalmasabb lehet a feladat „géprevitele", programnyelven történő megfogalmazása, de a tanulók számára sokszor unalmasnak tűnő folyamatábrarajzolás a bonyolultabb feladatok áttekinthetőségét, a menürendszerű, részekből álló, strukturált program elkészítését nagymértékben megkönnyíti. Az egyes programrészletek önállóan, különkülön is megírhatók, majd összefűzhetők.

Gondolkodásfejlesztés — LOGO

A magyar általános iskolák ma olyan iskolai számítógépekkel rendelkeznek, amelyek a bekapcsolás pillanatában a BASIC-programnyelvet értik. (A fran-

ciák Thomson márkájú iskolaszámítógépe mindig a megfelelő ún. „cartridge" csatlakoztatásával aktivizálható a különféle programnyelvek megértésére, ezek között egy speciális francia szavakból álló oktatási célú nyelv is szerepel.) A BASIC hazai egyeduralkodó szerepét az is magyarázza, hogy általában nem állnak rendelkezésre azok a segédprogramok (értelmezők vagy más néven interpreterek), amelyekkel a számítógép más nyelvre is megtanítható lenne. Pedig oktatási célra a BASIC-nél sokkal alkalmasabb programnyelvek is léteznek. Ezek közül is kiemelkedik a LOGO, amelyet kimondottan az ember és a gép közötti kommunikáció megkönnyítése érdekében alkottak meg. Sajnos, a hazai forgalomban levő számítógépek egy részére LOGO-interpreter még nem létezik, vagy csupán leszűkített változatok találhatóak. Az elterjedést tehát ez is nehezíti.

Ejtsünk néhány szót a LOGO-ról! „Szülőatyjának" *Seymour Papertet* tekintjük, a világhírű műszaki egyetem, a Massachusettes Institute of Technology professzorát, a Mesterséges Intelligencia Laboratórium vezetőjét. Papert régebben Svájcban dolgozott *Piaget* neves pszichológus munkatársaként. Piaget a gyermeki észlelési, gondolkodási folyamatokat, a gyermeki világképet tanulmányozta. Ennek hatása Papert munkásságán is erősen érezhető és a számítógépek oktatási alkalmazásának kutatásifejlesztési tevékenységét nagymértékben befolyásolta. Még a 60-as években a MIT-en a mesterséges intelligencia kutatására az akkor még modernnek mondható nagyszámítógépekre kifejlesztették a LISP programnyelvet. Hamarosan felmerült az igény gyermekek számára egy oktatási célú programnyelv megalkotására is. Ez a változat lett a LOGO. Bár már a legelső oktatási kísérletek is bebizonyították, hogy ez a nyelv mint kommunikációs módszer alkalmas az oktatási folyamat megújítására, mégis igazi sikerét és népszerűségét csak évekkel később, az ún. „teknőcgrafika" megalkotásával szerezte meg.

A LOGO több mint egy programnyelv. Inkább egy módszer, mely nemcsak a gyermek és a számítógép közti kommunikációt könnyíti meg, hanem új tanulási környezetet jelent. Alapelve a modul rendszerű „építkezés", a feladat részekre bontása a legegyszerűbb elemig, majd a végleges megoldásnak az apró eljárásokból való felépítése. A gyermek igen kényelmes formában, az anyanyelvén is kommunikálhat a géppel, új, önálló szavak megértésére is megtaníthatja azt. A nyelven belül létrehozott teknőcgrafika gondolatvilága a gyermekéhez közelálló és igen látványos eredményeket produkál. A tanulók már néhány alapvető parancs ismeretében is szívesen „eljátszanak" a számítógéppel, sőt, a szép rajzok készítése közben a szimmetriával és az ismétlődésekkel kapcsolatban matematikai problémák megoldásával is sikeresen próbálkoznak, matematikai-geometriai ismereteket szereznek, logikai, algoritmikus gondolkodási képességük is fejlődik. [8] De nemcsak a matematikában alkalmazható. Ugyanúgy használható az idegennyelv-tanulásban, mint például versírásra vagy csupán játékra. Játszhat vele egy óvodás és használhatja tanulmányaihoz az egyetemista is.

A programnyelv oktatási alkalmazásáról magyar nyelven megjelent könyv [9] a számítógépek oktatási alkalmazásaival kapcsolatban felvetődő filozofikus, néhol pszichológiai jellegű gondolatok és konkrét „mintapéldák" együttese. Miért van annyi matekfóbiás gyerek? Kell-e különös tehetség ahhoz, hogy sikereket érjünk el akár a matematikában, akár az idegen nyelvek tanulásában vagy éppen a tánctanulásban? Egyáltalán: jók-e azok a módszerek, amelyekkel a mai iskolákban oktatják gyermekeinket? Megtanulnak-e logikusan gondolkodni? Az említett könyvből az új informatikai-technikai eszközök oktatási alkalmazását ma még elutasító, vagy kellően nem

ismerő pedagógusok számára is világossá válik, hogy a számítógép bár nem csodaszer, mégis, ha helyesen alkalmazzák, olyan hatásokat érhet el, amelyekkel serkentheti a tanulási folyamatot, új, alkotó gondolatokra ösztönzi a diákot és tanárát egyaránt.

Programozzunk vagy sem?

Az előbbiekből, különösen a LOGO programnyelv oktatási előnyeinek felvázolásából a programozási ismeretek fontosságára következtethetnénk. Kétségtelen, hogy az ún. informatikai ismeretek ma már az általános műveltség fontos részét képezik. A mai iskolák diákjait fel kell készítenünk egy informatizált társadalomban történő alkotó tevékenységre, munkára. Szándékosan nem számítástechnikai, hanem informatikai ismeretekről beszélünk. Ugyanis az informatikai kultúra igen bő halmaza nem szűkíthető le számítástechnikai, vagy még inkább, csupán programozási ismeretekre, egy adott programnyelv kulcsszavainak megtanítására. Nem programozók nevelése a cél, hanem a korszerű informatikai eszközöket alkotó módon alkalmazni tudó felhasználóké. A programozási ismeretek szerepe is igen fontos, tehát az érdeklődő diákok számára feltétlenül biztosítanunk kell a lehetőséget, hogy mélyebb számítástechnikai-programozási ismereteket szerezhessenek bizonyos önként választott képzési formák (például fakultáció, szakkör, tanfolyam stb.) keretein belül. De a kötelezően tanított tananyag az informatika alkalmazói ismereteit kell, hogy tartalmazza. Az OPI az informatikai alapműveltség tartalmi kérdéseivel kapcsolatban állásfoglalást dolgozott ki, melyet a miniszteri értekezlet jóváhagyott. A konkrét tantárgyfejlesztési feladatok között szerepel a technika tantárgy átalakítása is. Olyan új, „modulrendszerű" felépítésről van szó, amelyben az iskola által választhatóan, külön tantárgyblokként szerepelne az informatika. Tematikája az iskola tárgyi, személyi feltételeit figyelembe vevő, a szaktanár által véglegesített lehető legrugalmasabb lenne. Az elkövetkező időszak komoly fejlesztési feladata az informatikai modulba tartozó ismeretek és variációs lehetőségek tartalmának, céljának, követelményeinek, eszközigényének konkrét meghatározása, résztémákra lebontott kidolgozása. (A LOGO programnyelv elsősorban az oktatást megújító módszer lehetne.) A fejlesztéssel kapcsolatos elképzeléseknek, hozzászólásoknak, vitáknak az OPI új módszertani lapja, az „Oktatás—Informatika" biztosít fórumot.

IRODALOM

[1] SZŰCS ERVIN: *A számítógép tegnaptól holnapig.* Műszaki Könyvkiadó, 1987.
[2] KŐRÖSNÉ MIKIS MÁRTA: *Gyermekek az informatika korában.* A tanító, 1988. 2. szám.
[3] FARKAS KÁROLY—KŐRÖSNÉ: *Játszd el a teknőcöt!* Segédkönyv tanítóknak az informatika oktatásához. Megjelenés alatt.
[4] VASSNÉ VARGA EDIT: *Az algoritmikus gondolkodás fejlesztése és az informatikai alapismeretek.* Oktatás—Informatika, 1988—89. 2. szám.
[5] BIZÁM—HERCZEG: *Sokszínű logika.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.
[6] ZÁMBÓ FERENC: *Számítástechnika* — OTTV. Készüljünk a versenyre! Szakoktatás, 1987. december
[7] BENCSIKNÉ TAKÁCS MÁRTA: *Feladatgyűjtemény* C—16-ra általános iskolásoknak, Novotrade, 1986.
[8] KŐRÖSNÉ MIKIS MÁRTA—PANUSKA RUDOLF: *Szimmetria — rekurzivitás — számítógépes frafika.* A fizika tanítása, 1987. 2. szám.
[9] SEYMOUR PAPERT: *Észrengés. A gyermeki gondolkodás titkos útjai.* SZÁMALK, 1988.
[10] GÁRDOS ÉVA: *A LOGO programozási nyelv, mint a számítástechnika oktatásának egyik új eszköze.* A Matematika Tanítása, 1984. 6.

BENCZE MIHÁLY
tanár
Brassó

Az „e" számmal kapcsolatos egyenlőtlenségek

1. Tétel: (Pólya Gy.—Szegő G.)
Ha n egy természetes szám ($n \geqq 1$), akkor

$$\frac{e}{2n+2} < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{2n+1}.$$

(A tétel megtalálható *Pólya György—Szegő Gábor:* Feladatok és tételek az analízis köréből I. kötet, Tankönyvkiadó, Bp., 1980. könyvében).

Bizonyítás: Először igazoljuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\ln(1+x) < x + x\ln\left(\frac{2+x}{2+2x}\right), \quad \text{ahol} \quad x \in (0;\ 1).$$

Legyen $f(x) = x + x\ln\left(\frac{2+x}{2+2x}\right) - \ln(1+x)$, $f: (0;\ 1) \to \mathbf{R}$. Deriválva $f'(x) =$
$= 1 + \ln(2+x) + \frac{x}{2+x} - \ln(2+2x) - \frac{x}{2+2x} - \frac{1}{1+x}$. Még egyszer deriválva és elvégezve a számításokat: $f''(x) = \frac{3x^2+6x+4}{2(1+x)^2(2+x)^2} > 0$, azaz f' szigorúan növekvő és így $f'(x) > f'(0) = 0$. Ezt azt jelenti, hogy f szigorúan növekvő, tehát $f(x) > f(0) = 0$. Ezzel az egyenlőtlenséget igazoltuk. Ha $x = \frac{1}{n}$, akkor az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{2n+1}{2n+2}\, e$, azaz $\frac{e}{2n+2} < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ egyenlőtlenség adódik. Most igazoljuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\ln(1+x) > x + x\ln\left(\frac{2}{2+x}\right), \quad \text{ahol} \quad x \in (0;\ 1),$$

legyen $g: (0;\ 1) \to \mathbf{R}$, ahol $g(x) = \ln(1+x) - x - x\ln\left(\frac{2}{2+x}\right)$. Deriválva $g'(x) =$
$= \frac{1}{1+x} - 1 - \ln 2 + \ln(2+x) + \frac{x}{2+x}$. Ezt is deriválva $g''(x) = \frac{x^3+3x^2+5x}{(1+x)^2(2+x)^2} > 0$, azaz g' szigorúan növekvő és ezért $g'(x) > g'(0) = 0$.

Ez pedig azt jelenti, hogy g is szigorúan növekvő, azaz $g(x) > g(0) = 0$. Ha $x = \frac{1}{n}$, akkor $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \frac{2n\,e}{2n+1}$ egyenlőtlenség következik, innen pedig $e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n <$
$< \frac{e}{2n+1}$. Ezzel a tételt igazoltuk.

1. MEGJEGYZÉS: A fenti bizonyításból következik, hogy a tétel igaz minden $n \geqq 1$ valós számra is.

2. Tétel: Ha $n \geqq 1$, akkor fennáll a következő egyenlőtlenséglánc:

$$\frac{e}{2n+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - e < \frac{e}{2n}.$$

Bizonyítás: Szorozva $1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}$-nel az első tételbeli egyenlőtlenséglláncot, azt kapjuk, hogy:

$$\frac{e}{2(n+1)} \cdot \frac{n+1}{n} < \left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{e}{2n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$$

vagy

$$\frac{e}{2n} < e+\frac{e}{n}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \frac{e}{2n+1} \cdot \frac{n+1}{n},$$

innen pedig

$$-\frac{e}{2n} = \frac{e}{2n} - e < e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \frac{(n+1)e}{n(2n+1)} - \frac{e}{n} = -\frac{e}{2n+1},$$

ahonnan a tételbeli egyenlőtlenséglánc következik.

2. MEGJEGYZÉS: A fenti tételből a következő egyenlőtlenséglláncot kapjuk:

$$x+x\ln\left(\frac{2+2x}{2+x}\right) < (1+x)\ln(1+x) < x+x\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right), \quad \text{ahol} \quad x \in (0;\, 1).$$

3. Tétel: Ha $n \geqq 38\,494$, akkor

$$\frac{e^{-1}}{2n} < e^{-1} - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \frac{e^{-1}}{2n-1}.$$

Bizonyítás: Először igazoljuk, hogy $(1+x)\ln(1-x) < x\ln\left(1-\frac{x}{2}\right) - x$, ahol $x \in (0;\, 1)$. Legyen $f\colon (0;\, 1) \to \mathbf{R}$, ahol $f(x) = x\ln\left(1-\frac{x}{2}\right) - x - (1+x)\ln(1-x)$. Deriválva:

$$f'(x) = \frac{1+x}{1-x} + \ln\left(1-\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2-x} - \ln(1-x) - 1.$$

Ezt is deriválva és elvégezve a műveleteket $f''(x) = \frac{x^2+7(1-x)+1}{(1-x)^2(2-x)^2} > 0$ adódik, az f' szigorúan növekvő és ezért $f'(x) > f'(0) = 0$. Innen pedig az következik, hogy f is szigorúan növekvő, azaz $f(x) > f(0) = 0$. Ha $x = \frac{1}{n}$ akkor a következő egyenlőtlenséget kapjuk

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \frac{2n-1}{2n} e^{-1}, \quad \text{ahonnan} \quad e^{-1} - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} > -\frac{e^{-1}}{2n}.$$

Most igazoljuk, hogy $(1+x)\ln(1-x)>x\ln\left(\frac{2-2x}{2-x}\right)-x$. Legyen $g:(0;1)\to\mathbf{R}$, ahol $g(x)=(1+x)\ln(1-x)+x-x\ln\left(\frac{2-2x}{2-x}\right)$. Deriválva $g'(x)=\frac{1+x}{1-x}+\ln(1-x)+$ $+1-\ln\left(\frac{2-2x}{2-x}\right)+\frac{x}{(1-x)(2-x)}$. Még egyszer deriválva és elvégezve a számításokat $g''(x)=\frac{x^4-5x^3+8x^2-9x+8}{(1-x)^2(2-x)^2}$ adódik. Ha most $h(x)=x^4-5x^3+8x^2-9x+8$, akkor megmutatható, hogy van olyan $x_0>0$, hogy $(0;x_0)$ intervallumon $h(x)>0$, ebből pedig $g''(x)>0$ adódik. Ezek szerint g' szigorúan növekvő, azaz $g'(x)>$ $>g'(0)=2>0$, és így g is szigorúan növekvő: $g(x)>g(0)=0$. Ha $x=\frac{1}{n}$, akkor $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\frac{2n-2}{2n-1}e^{-1}$ ahonnan $e^{-1}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\frac{e^{-1}}{2n-1}$, de számítással igazolható, hogy ez az egyenlőtlenség csak $n\geqq 38\,494$ esetén érvényes.

3. MEGJEGYZÉS: Az előbbi bizonyításból következik, hogy az $\frac{e^{-1}}{2n}<e^{-1}-$ $-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ egyenlőtlenség minden $n\geqq 1$ esetén érvényes.

4. Tétel: Ha $n\geqq 38\,494$, akkor $\frac{e^{-1}}{2n-1}<\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-e^{-1}<\frac{e^{-1}}{2n-2}$.

Bizonyítás:

$$\left(e^{-1}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)=e^{-1}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\frac{e^{-1}}{n}<$$

$$<\frac{e^{-1}}{2n-1}-\frac{e^{-1}}{n}=\frac{-(n-1)e^{-1}}{n(2n-1)}$$

innen pedig

$$e^{-1}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<\frac{-(n-1)e^{-1}}{n(2n-1)}\cdot\frac{n}{n-1}=-\frac{e^{-1}}{2n-1},$$

azaz

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-e^{-1}>\frac{e^{-1}}{2n-1}.$$

Hasonlóan

$$\left(e^{-1}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)=e^{-1}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\frac{e^{-1}}{n}>\frac{e^{-1}}{2n}-\frac{e^{-1}}{n}=-\frac{e^{-1}}{2n},$$

innen pedig $e^{-1}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n>\frac{e^{-1}}{2n-2}$ egyenlőtlenség adódik.

4.1. MEGJEGYZÉS: Az utolsó két tétel bizonyításából rögtön adódik, hogy $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-e^{-1}<\frac{e^{-1}}{2n-2}$ igaz minden $n\geqq 2$ valós számra.

4.2. MEGJEGYZÉS: Az utolsó tételből a következő egyenlőtlenségláncot kapjuk:

$$-x+x\ln\left(\frac{2}{2-x}\right)<\ln(1-x)<-x+x\ln\left(\frac{2-x}{2-2x}\right),\quad \text{ahol}\quad x\in(0;\,1).$$

1. Alkalmazás:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e\right)=\frac{e}{2}.$$

Az eredmény rögtön adódik az első két tételből. A fenti határérték kiszámítása L'Hospital-szabállyal bonyolult.

2. Alkalmazás:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-e^{-1}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(e^{-1}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)=\frac{e^{-1}}{2}.$$

Az eredmény az utolsó két tételből következik.

3. Alkalmazás: Ha $k, p\geqq 0$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} n^{k-p}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^k\cdot\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e\right)^{-p}=\left(\frac{e}{2}\right)^{k-p}.$$

Az első tételbeli egyenlőtlenségláncot k-adik, a második tételbeli egyenlőtlenségláncot p-edik hatványra emelve és elosztva, rögtön adódik az eredmény. Fordított sorrenddel azonnal következik egy ehhez hasonló állítás.

4. Alkalmazás: Ha $k, p\geqq 0$, akkor

$$\lim n^{k-p}\left(e^{-1}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)^k\cdot\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-e^{-1}\right)^{-p}=(2e)^{p-k}.$$

A bizonyításhoz az utolsó két tételt használjuk fel.

5. Alkalmazás: Ha $n\geqq 38\,494$, akkor

$$\frac{(4n+1)e}{2n(2n+1)}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\frac{(4n-1)e}{2n(2n-1)}.$$

Bizonyítás: A harmadik tételbeli egyenlőtlenségláncot szorozzuk e^2-tel, és az így kapott egyenlőtlenségláncot hozzáadjuk a második tételbelihez.

6. Alkalmazás: Ha $n\geqq 38\,494$, akkor

$$\frac{(4n+1)e}{(2n-1)(2n+2)}<e^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{(4n-1)e}{(2n-2)(2n+1)}.$$

Bizonyítás: A negyedik tételbeli egyenlőtlenségláncot szorozzuk e^2-tel és hozzáadjuk az első tételbeli egyenlőtlenséglánchoz.

7. Alkalmazás: Ha $n\geqq 38\,493$, akkor

$$\frac{2(2n+2)e}{2n+1}<\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}+e^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}<\frac{2(2n+1)e}{2n}.$$

Bizonyítás: A negyedik tételbeli egyenlőtlenségláncot szorozzuk e^2-tel, az így kapott egyenlőtlenséglánchoz n helyett $(n+1)$-et írunk és összeadjuk a második tételbeli egyenlőtlenséglánccal.

8. Alkalmazás: Ha $n \geqq 38\,493$, akkor

$$\frac{4ne}{2n+1} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n + e^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2} < \frac{(4n+2)e}{2n+2}.$$

Bizonyítás: A harmadik tételbeli egyenlőtlenségláncot beszorozzuk e^2-tel, az így kapott egyenlőtlenséglánchoz n helyett $(n+1)$-et írunk és összeadjuk a második tételbeli egyenlőtlenséglánccal.

9. Alkalmazás: Ha $n \geqq 38\,494$, akkor

$$\frac{(4n-4)e}{2n-1} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} + e^2\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n+1} < \frac{(4n-2)e}{2n}.$$

Bizonyítás: Az első tételbeli egyenlőtlenséglánchoz n helyett $(n+1)$-et írunk és összeadjuk azzal az egyenlőtlenséglánccal, amit úgy kapunk, hogy a harmadik tételbeli egyenlőtlenségláncot beszorozzuk e^2-tel.

10. Alkalmazás: Ha $n \geqq 38\,494$, akkor

$$\frac{4ne}{2n-1} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n + e^2\left(\frac{n-1}{n}\right)^n < \frac{(4n-2)e}{2n-2}.$$

Bizonyítás: A második tételbeli egyenlőtlenséglánchoz n helyett $(n-1)$-et írunk és összeadjuk azzal az egyenlőtlenséglánccal, amit úgy kapunk, hogy a negyedik tételbeli egyenlőtlenségláncot szorozzuk e^2-tel.

11. Alkalmazás:

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(e\left(1-\frac{1}{n}\right)^n - 1 - \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n + e^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \frac{1}{4}.$$

Megoldás: Az első és a negyedik tételbeli egyenlőtlenségláncot összeszorozzuk.

12. Alkalmazás:

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(e^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - 1 - \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n + e\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right) = \frac{1}{4}.$$

Megoldás: A második és harmadik tételbeli egyenlőtlenségláncot összeszorozzuk.

13. Alkalmazás: Ha $m \geqq 1$, egy természetes szám, akkor

$$\left(\frac{e}{2}\right)^{2m}\left(\frac{(2\pi)^{2m}\cdot B_m}{2\cdot(2m)!} - 1\right) < \sum_{k=1}^{\infty}\left(e - \left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^{2m} <$$

$$< e^{2m}\left(\frac{\pi}{2^{2m+1}}\cdot\frac{1}{(2m-2)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{2m-2}}{dz^{2m-2}}\left(\frac{1}{z}\operatorname{tg}\pi z\right) - 1\right) <$$

$$< \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} - e\right)^{2m} < \left(\frac{e}{2}\right)^{2m}\frac{(2\pi)^{2m}\cdot B_m}{2\cdot(2m)!},$$

ahol B_m az m-edik Bernoulli-féle szám. Például, ha $m=1$,

$$\frac{e^2}{4}\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)<\sum_{k=1}^{\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^2<e^2\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right)<\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}-e\right)^2<\frac{(\pi e)^2}{24}.$$

Bizonyítás: Az első és a második tételbeli egyenlőtlenségláncokat $2m$-edik hatványra emeljük és összeadjuk felhasználva a következő azonosságokat:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}}=\frac{(2\pi)^{2m}B_m}{2(2m)!} \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2m}}=\frac{\pi}{2^{2m+1}}\frac{1}{(2m-2)!}\lim_{z\to\infty}\frac{d^{2m-2}}{dz^{2m-2}}\left(\frac{1}{z}\operatorname{tg}\pi z\right).$$

14. Alkalmazás:

$$\frac{e}{2}(\ln(n+2)-1)<ne-\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<\frac{e}{2}(1+\ln n).$$

Bizonyítás: Az első tételbeli egyenlőtlenségeket összeadjuk és felhasználjuk az

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$$

egyenlőtlenségeket. Érdekességként azonnal adódik a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(ne-\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)=\frac{e}{2}$$

határérték.

15. Alkalmazás:

$$\frac{e}{2}(\ln(n+2)-1)<\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}-ne<\frac{e}{2}(1+\ln n).$$

A bizonyításhoz felhasználjuk a második tételt. Rögtön következik az alábbi határérték.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}-ne\right)=\frac{e}{2}.$$

16. Alkalmazás:

$$\frac{\sqrt{2n+3}\cdot e^n}{2n+2}<\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<\frac{2e^n}{\sqrt{2n+3}}.$$

A bizonyításhoz az első tételt használjuk fel.

17. Alkalmazás:

$$\frac{e^n}{2}\sqrt{2n+3}<\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}<e^n\sqrt{2n+1}.$$

A bizonyításhoz a második tételt használjuk fel.

18. Alkalmazás: Ha $x>1$, akkor

$$\max\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{x^n}\right)^{x^n+1};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{x^n-1}\right)^{x^n-1}\right\}<\frac{e}{2}(2e-3+e^{\frac{1}{x}}).$$

Bizonyítás: A második tételből $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e<\frac{e}{2n}$, ahonnan változócserével $\frac{2}{e}\left(1+\frac{1}{x^n}\right)^{x^n+1}-2<\frac{1}{x^n}$, innen pedig $\frac{2}{e}\cdot\frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{x^n}\right)^{x^n+1}-\frac{2}{n!}<\frac{1}{n!\,x^n}$. Ezt összegezzük és elvégezzük a számításokat, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{x^n}\right)^{x^n+1}<\frac{e}{2}\left(2e-3+e^{\frac{1}{x}}\right).$$

Hasonlóan igazoljuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{x^n-1}\right)^{x^n-1}<\frac{e}{2}\left(2e-3+e^{\frac{1}{x}}\right),$$

innen pedig következik az állítás.

19. Alkalmazás: Ha $x>1$, akkor

$$\max\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{x^n}\right)^{x^n+1};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{x^n+1}\right)^{x^n+1}\right\}<\frac{2e-3+e^{\frac{1}{x}}}{2e}.$$

Ha $x\to\infty$ akkor a **18.**, **19.** alkalmazásbeli egyenlőtlenségekben egyenlőség áll fenn. A továbbiakban néhány nyitott kérdést és feladatot mutatunk be.

1. Feladat: Számítsuk ki a következő határértéket:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot e^{-n}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k.$$

2. Feladat: Számítsuk ki a következő határértéket:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}.$$

3. Feladat: Számítsuk ki a következő határértéket:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{n}{e^2}\right)^n\prod_{k=1}^{n}\left(e-\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)$$

és a hasonló többi határértéket.

4. Feladat: Ha $n\geqq 40\,000$, akkor

$$\frac{e^{-1}}{2n+3}<\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-e^{-1}<\frac{e^{-1}}{2n+2}.$$

5.* Feladat: Határozzuk meg mindazon n_0 és k természetes számokat, amelyekre

$$\frac{e^{-1}}{2n+k+1}<\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-e^{-1}<\frac{e^{-1}}{2n+k}$$

bármely $n\geqq n_0$ esetén.

6. Feladat:** Határozzuk meg mindazon x, y, z, n_x, n_y, n_z számokat, amelyekre

$$\frac{e^x}{2n+2} < e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \frac{e^x}{2n+1}, \quad (n \geqq n_x);$$

$$\frac{e^y}{2n+2} < e^y - \left(1+\frac{y}{n}\right)^n, \quad (n \geqq n_y);$$

$$e^z - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n < \frac{e^z}{2n+1}, \quad (n \geqq n_z).$$

Hasonlóan a többi tételbeli egyenlőtlenségekre is.

7.* Feladat:** Számítsuk ki a következő értékeket

$$L_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} - e\right)^n \quad \text{és} \quad l_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(e - \left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^n,$$

ahol $n>1$. (Ezek léteznek, mert L_n, l_n konvergens sorok.)

8. Feladat:** Határozzuk meg az a, b, c állandókat $(c\in(0;1))$ és az f_n függvényt úgy, hogy

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = ne + a - b\ln(n+c) + 0(f_n).$$

Hasonlóan a többi tételbeli esetekre is.

9. Feladat:** Határozzuk meg az a, b, c állandókat és az f_n függvényt úgy, hogy:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{ae^n}{\sqrt{n+b}} + c + 0(f_n).$$

Hasonlóan a többi tételbeli esetekre is.

Mindezen feladatok és nyitott kérdések megoldását a kedves olvasótól várjuk

MIHALOVICS SÁNDOR
középiskolai tanár
Esztergom

Egyszerű kapcsolatok a binomiális együtthatók között

A harmadikos gimnáziumi tankönyv konkrét kiválasztási feladat kapcsán vezeti be a $\binom{n}{k}$ jelet, amellyel az n elemű halmaz k elemű részhalmazainak a számát jelöli. Ezután különféle $n\in\mathbf{N}$ és $k\in\mathbf{N}$, $k\leqq n$ esetén kiszámítja az $\binom{n}{k}$ értéket, rámutat a számok közötti kapcsolatokra s így jut el a Pascal-háromszöghöz:

0. sor					1				
1. sor				1		1			
2. sor			1		2		1		
3. sor		1		3		3		1	
4. sor	1		4		6		4		1

A Pascal-háromszög legfelső sorát nulladik sornak, az egyes sorok bal szélső elemét nulladik elemnek nevezve, az n-edik sor k-adik eleme éppen $\binom{n}{k}$, amit C_n^k-val

is jelölhetünk, neve: binomiális együttható. A Pascal-háromszög n-edik sora $n+1$ számból áll, amelyek: $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}, C_n^n$.

A Pascal-háromszög egy-egy sorában található számok bizonyos hányada érdekes tulajdonságokat mutat. Ilyenekkel találkozhatunk a szomszédos sor elemei között is.

Ezek a kapcsolatok felkelthetik a tanulók figyelmét, motiváltabbá tehetik a tanulást, elősegíthetik és elmélyíthetik az anyag jobb megértését.

Ragadjunk ki néhányat ezekből az elemi kapcsolatokból!

1. A Pascal-háromszög 5. sorában egymás mellett találjuk 5-öt és ennek kétszeresét 10-et. Ez az érdekes kapcsolat felvetheti az erre vonatkozó általánosabb kérdést. Milyen sorokban lehet találni még ilyen számpárokat?

A választ a $2 \cdot C_n^k = C_n^{k+1}$ egyenlet megoldása foglalja magában.

Az egyenlet faktoriálisos átírása és némi rendezése után szinte azonnal adódik a természetes számokból álló $n=3k+2$ megoldás. Tehát, végtelen sok olyan sor van, amelyekben megtaláljuk a kívánt kapcsolatú elemeket. Ezek: $n=2, 5, 8, 11 \ldots$ stb.

2. A háromszög hetedik sora 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1 számokból áll. Ezek között 7, 21, 35, illetve 35, 21, 7 számtani sorozatot alkotnak. Vannak-e még ilyen sorok? Ha vannak, keressük meg ezeket.

Tegyük fel, hogy létezik olyan természetes n és k, hogy C_n^{k-1}, C_n^k és C_n^{k+1} számtani sorozatot alkot. Ekkor $2 \cdot C_n^k = C_n^{k-1} + C_n^{k+1}$, aminek átírása:

$$\frac{2n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}.$$

Egyszerűbb alakra hozás után a

$$4k^2 - 4nk + n^2 - n - 2 = 0 \tag{1}$$

egyenlethez jutunk. Ennek k-ra vonatkozó megoldása

$$k_{1,2} = \frac{n \pm \sqrt{n+2}}{2} = \frac{(l^2-2) \pm l}{2},$$

ahol l természetes szám. Tehát az (1) kétismeretlenes egyenletet kielégítő természetes számok az

$$n = l^2 - 2,$$

$$k_{1,2} = \frac{l^2 \pm l - 2}{2} \tag{2}$$

összefüggésből nyerhetők, amelyekben $l \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ és $1 \leqq k \leqq n-1$.

Az l első megengedett értéke 3, melyhez az $n=7$. sor tartozik, $l=4$-hez $n=14$, $k_1=5$ és $k_2=9$ rendelhető. A 14. sor elemei 1, 14, 91, 364, 1001, 2002, 3003, 3432, 3003, 2002, 1001, 364, 91, 14, 1, amelyekből a kisebb k-hoz tartozó sorozat tagjai: 1001, 2002, 3003.

A soron következő l-hez $n=23$ tartozik és így tovább. Tehát az (1) egyenletnek végtelen sok megoldása van, végtelen sok olyan sor létezik, amely két, háromtagú egymást követő számtani sorozatot tartalmaz. A (2) alatti megoldásból megállapítható, az is, hogy egy-egy sorban háromnál több tagból álló és egymást követő számtani sorozat nem létezhet.

3. A számtani sorozat után felvetődhet a mértani sorozat gondolata.

Könnyű kimutatni, hogy a $(C_n^k)^2 = C_n^{k-1} \cdot C_n^{k-1}$ egyenletnek nincs megoldása a természetes számok körében, azaz a Pascal-háromszög egyetlen sorában sem találunk három vagy több tagú egymást követő mértani sorozatot.

4. A Pascal-háromszög 14. sorának 6. eleme és 15. sorának 5. eleme egyaránt 3003. Vannak-e más sorokban is ilyen megegyezések?

A felvetett kapcsolat általános megfogalmazásban így írható: $C_x^{y-1} = C_{x-1}^{y}$. Átírás és rendezés után a

$$(x-y+1)(x-y) = xy \tag{3}$$

egyenlethez jutunk, amely csupán egy sor ügyeskedésen keresztül oldható meg.

Legyen $(x; y) = W$. Ekkor $x = u \cdot W$ és $y = v \cdot W$ ahol $(u; v) = 1$. Beírva x-et és y-t (3)-ba az

$$(u-v)[(u-v)W+1] = uvW \tag{4}$$

egyenlethez jutunk. Mivel u és v relatív prímek, ezért

$$(u-v;\ uv) = 1, \quad \text{és} \quad (W;\ (u-v)W+1) = 1.$$

Ebből következik, hogy a (4) egyenlet csak úgy teljesülhet, ha fennáll

$$\begin{cases} (u-v)W+1 = uv, \\ u-v = W \end{cases}$$

kapcsolat, amely a következő alakba írható:

$$\begin{cases} v^2+vW-W^2 = 1, \\ v+W \quad\quad = u. \end{cases} \tag{5}$$

Az (5) egyenletrendszer első egyenletének természetes számok halmazán történő megoldásához az alábbi megállapításokat tehetjük:

a) Ha $v = W$, akkor $v = W = 1$.

b) Ha $v = C$ és $W = d$ megoldása az egyenletnek, akkor az egyenlet megoldása a $v = c+d$ és a $W = c+2d$ is.

c) Bebizonyítható, hogy a felsoroltakon kívül más megoldása nincs az egyenletnek.

Ezekből az észrevételekből összeállítható megoldáspárok

v	1	2	5	13	34	89 ...
W	1	3	8	21	55	144 ...

és így az összetartozó x és y értékpárok

x	2	15	104	714	4895	33 552 ...
y	1	6	40	273	1870	12 816 ...

Ezekből most már könnyen adódnak az összetartozó binomiális együtthatók:

$$C_2^0 = C_1^1, \quad C_{15}^5 = C_{14}^5, \quad C_{104}^{39} = C_{103}^{40}, \quad C_{714}^{272} = C_{713}^{273} \ldots \text{ stb.}$$

Ez a néhány kiragadott feladat is kellőképpen jelzi, hogy a középiskolai anyag motiváltság és tanulói aktivitás felkeltése terén még számtalan kiaknázatlan lehetőséggel rendelkezik.

SZABÓNÉ GÁBRIS RITA
középiskolai tanár
Dunakeszi

Tanulmány Simonovits Miklós: Számítástechnika c. tankönyvének tanításáról

1. A csoport jellemzése

A gimnázium 3. osztályában fakultatív tantervű csoportot tanítottam. A létszám kezdetben 7 fő volt (3 lány és 4 fiú), félévkor 1 fiú távozott az iskolából, így 6-an maradtak. Mivel ez a tanóra egy időben volt a többi fakultatív órával (így a matematika fakultációval), ezért ebbe a csoportba inkább gyenge matematikai képességű tanulók jelentkeztek.

Egy fiú már régebben foglalkozott számítástechnikával, ő minden feladatot könnyen megoldott. Egy lánynak van otthon C—16 típusú számítógépe, de teljesen kezdő volt a programozásban. Most év végére kicsit jobban ment neki a többieknél. A maradék 4 gyerekkel elég nehéz dolgom volt, nem érdekelte őket eléggé a komoly munka, inkább játszani akartak. Év végére sikerült elérnem, hogy belátták a programozás szükségességét és egy kis kedvet is adtam hozzá. Már nemcsak a játék miatt ülnek a géphez.

A heti óraszám 1-2 óra volt.

A kísérletet 1986. nov. 1-én kezdtem és 1987. jún. 1-én fejeztem be.

Az első 4 hónapban fizika alapú tantervet választottam, az utolsó 3 hónapban pedig szövegfeldolgozást. Sajnos több órám elmaradt egyrészt iskolai szünetek, másrészt egyetemi konzultációim miatt. Mivel az iskolában egyedül én tanítok számítástechnikát, ezért szakhelyettesítés nem volt.

2. Géppark

Az iskolában 2 db HT—1080Z, 5 db Spectrum és 1 db C—64 típusú gép van, utóbbi nyomtatóval és lemezegységgel.

Mivel csak 6 tanuló van a csoportban, ezért az 5 Spectrummal dolgoztunk, az egyik gépnél ketten ültek. Volt olyan is, hogy a C—64-be betöltöttük a Spectrum-szimulátor programot, és így kinyomtathattuk a listákat. A programokat mindig felvettük kazettára is.

A HT gépeket azért nem használtuk, mert azt akartam, hogy egységes programokat írjunk, minden gyerek ugyanazokat az utasításokat használja. A Spectrum ilyen szempontból elég sajátos BASIC-kel rendelkezik, más, mint a HT és C—64 gépek.

3. Délutáni gyakorlóidő

Nincs rá lehetőség. Mivel én egyedül felelek az egész berendezésért, csak akkor mehetnek be a tanulók a gépterembe, ha az iskolában vagyok. Általában délelőtt szoktak gyakorolni, ha lyukas órájuk van. Ilyenkor elkérik tőlem a kulcsot, és én időnként benézek a terembe. Csak egy délután vagyok ott, akkor pedig szakköröm van. Erre a szakkörre a fakt. csoportomból senki se jár.

4. A kísérletről

A kísérlet elég szoros tempót diktált az egyes programok megírásához. Nagyon sok új anyag szerepelt bennük, és ez többnyire nem számítástechnikai jellegű volt. Pl. fizikából át kellett ismételnünk elméleti részeket, amely sok időt vett igénybe. Ezért egy-egy nehéz téma után könnyítésül többször beiktattam gyakorló órát, ahol rövid kis programokat írtunk. Ezt azért csináltam, mert osztályoznom is kellett valamire. A nagy programokban kevés önálló munkára számíthattam, ezeket általában közös erővel hoztuk össze. A feladatok és új anyag aránya kb. fele-fele volt. Véleményem szerint néhol több gyakorlás kellett volna.

Most röviden kitérek az órákon előforduló problémákra.

Fizika alapú tanterv

Az első órák könnyűek voltak, csak néhány új utasítást tanultunk (PRINT, INPUT, LET, GOTO, STOP), valamint parancsokat (RUN, LIST, BREAK, CONT). Gyorsan megírták a tanulók a Pitagorasztételt és egyszerű képletek kiszámítására vonatkozó programokat.

A tankönyv 27. oldalán leírt függvényközelítés matematikailag volt nehéz számukra.

A BASIC kulcsszavakat gyorsan megtanulták, a csoport egy része angolt tanul. Mindegyik lényeges kulcsszó szerepelt. Nem tanítottam az összes matematikai függvényt, és olyan (színre, hangra, grafikára vonatkozó) utasításokat, ami csak Spectrumon szerepel. Ezeket ráérnek csak akkor használni, ha már az alap BASIC-kel tisztában vannak. Ezek nagyon gépfüggő utasítások, nincs értelme kezdőknek megtanítani. Egyetlen egyszer sem volt probléma, hogy kulcsszót ne tudtak volna.

A ciklusszervezést a rajzoláson keresztül tanítottam. Nagyon élvezték a rajzolást, ezt a Spectrum jó képfelbontása segítette. Az ellipszisek, Lissajoux-görbék ábrázolását örömmel, lelkesen csinálták. Itt sok időt hagytam a kísérletezésre. Ezt így kellett, legközelebb is így tennék.

A görberajzolásnál jelentkeztek sebesség-gondok. Kimondottan bosszantó volt a BASIC lassúsága a Lissajoux-görbéknél. Koordináta-rendszer rajzolását általában ciklussal végeztük. Egyszer DRAW utasítást használtunk, és szemmel láthatóan gyorsabb lett a rajzolás. Felhívtam a figyelmet a játékprogramokra, ahol nagyon gyors a mozgás, viszont azokat gépi kódban írják.

Megírtuk a ferde hajítás pályarajzolásának programját. Különböző kezdősebesség és szög mellett hajítva egy képernyőre rajzoltuk a pályákat. Nem okozott nehézséget.

Az első kemény dió a ballisztikus görbe volt (Tankönyv 41. program). Itt alaposabb előkészítés kellett volna a fizikai ismereteik terén. A programban két időpont között egyenes vonalú egyenletes mozgással közelítjük a test mozgását. Ennek alapján rekurziókat használunk. Ezeknek a differencia-egyenleteknek a megértése okozott gondot. Legközelebb itt lassítanék kicsit. A kísérletezés itt is fontos volt. Különböző légellenállási tényezők esetén vizsgáltuk a mozgást.

E rész után ismét beiktattam rövid programokat könnyítésül. Ezeket gyorsan, ügyesen megcsinálták.

A Kepler-törvények fizikáját már jobban előkészítettem, okulva az előzőkön, ez már kevesebb problémát jelentett. Részletes algoritmust írtunk, minden változót előre megbeszéltünk. Itt már ismerték a differencia-egyenleteket, ezért ezt a pgogramot kb. fél óra alatt megírták (Tankönyv 40. program). Itt ez a tempó megfelelő volt.

A következő órán ismét rövid fizikai hátterű programokkal lazítottunk, osztályoztam ezeket. A gyerekeknek jól esett a könnyítés a sok tömény elmélet után.

Az ingamozgás megint próbára tette a tanulók emlékezetét. Részletesen átismételtük a fizikát és a szögfüggvényeket. Probléma volt a radiánban számolás.

Az igazi inga mozgásának leírása után kis módosítással kirajzoltuk egy egyszerűbb ingamozgás pályáját is. Ebben a sin x-et x-szel közelítettük. Egy képernyőn ábrázolva látszott, hogy az utóbbi inga gyorsabban mozog. Hogy jobban látszódjon a két lengés, ezért kitöröltük a pályát, és csak a pont mozgását vizsgáltuk. Így jól követhető volt a lengés.

Ez a fizika alapú tanterv 26 órát vett igénybe. Egy másik kísérletben kb. 30 órát szánnék rá. Ezalatt valóban kényelmesen meg lehet tanítani. Sajnos a tankönyvben az ingamozgás nem szerepel, és kevés fizikai hátterű feladat van benne olyan, ami egyszerű. Az ingáról kaptam leírást, de ez a gyerekeknek nem volt meg. Általában nehézséget okozott, hogy a tankönyvben leírt programok nem használhatók rögtön, mivel mi nem HT-n

dolgoztunk. Sok időmet elvett, míg minden feladatot átírtam Spectrumra.

Szövegalapú tanterv

Nehezebbnek bizonyult az előzőnél. 20 óra maradt a feldolgozására, de ez kevésnek bizonyult. A csoport nem matematikai beállítottságú, mégis a „képletes" programokat jobban értették, mint a szövegfeldolgozást. Az egyszerű numerikus vektorok még közel álltak hozzájuk, de a stringtömbök alkalmazása problémát okozott. A Spectrum stringkezelése, DATA sorok írása nehézkes, viszont a részstring képzés előnyös. A MID$, RIGHT$, LEFT$ függvényeket nem vettük. A DATA—READ utasításpár megtanítása könnyen ment.

A szótárprogramot (Tankönyv 42/2. program) fokozatos módosításokkal, bővítésekkel együtt 5 órán keresztül írtuk, az elején lassan ment, különösen a K érték automatikus megállapítása. A listázást nem kellett lapozós formában írni, mert a Spectrum képernyője nem szalad el.

A szótár után az ASCII kód került sorra, itt rövid feladatokat adtam, amire osztályoztam is.

Az INKEY$ megtanulásakor megírtunk egy rövid írógépprogramot. INKEY$-ral pontokat mozgattunk, rajzoltunk különféle ábrákat, ez nagyon tetszett a gyerekeknek. Sokat kísérleteztünk.

Nehéznek bizonyult a Titkosírás c. program (Tankönyv 276. old. 1. feladat). Részletes algoritmust készítettünk. A kód kiszámítása okozott nehézséget, és a RETURN billentyű figyelése szó begépelése után, valamint a kettős ciklusok.

A szövegfeldolgozás legnehezebb programja egy molekulasúly-kereső program megírása volt. Nem jutottunk el a teljes megoldáshoz, csak előkészítő feladatokra maradt idő.

Pl. Készíts programot, amely egytetszőleges W$ szó alá kiírja a szóalakot a következő alakban: ha egy magánhangzóhoz érkezik, A-t ír alá, ha egy betűs mássalhangzóhoz, az alá B-t ír. Az előzőt módosítva: Ha egy kettősbetűt talál, mindkettő alá K betűt írjon stb.

Mivel közeledett az év vége, és könnyebb feladatokat akartam venni, ezért ezen programok befejezéséig csak 2 tanuló jutott el. Az utolsó programunk az osztályadminisztráció volt (Tankönyv 274. old.). Nem okozott különösebb problémát, mindenki jól megírta, de segíteni kellett egy-két tanulónak.

5. Hogyan folytatnám?

A szövegalapú tantervből még sok fontos feladat kimaradt. Nem jutott idő a molekulasúly-kereső programra, pedig ennek előkészítése megtörtént. Még kb. 4 órát venne igénybe. Szerettem volna megíratni egy gépíró programot is, de erre sem maradt idő. Ez is kb. 4 óra lenne.

Bővebben foglalkoznék a C—64 lemezegységével, adatlemezek készítésével, adatfeldolgozással. Szeptemberben valószínűleg ezekkel fogom folytatni.

Hátravan még a GOSUB is.

Egy évvel később szeretnék eljutni a PEEK, POKE utasításokhoz, amelyeknek a Commodornál különösen nagy szerepük van. Esetleg a gépi kódú programozás alapjaihoz.

Iskolánk akar venni még néhány Commodore gépet, ezért ennek a típusnak a megismertetését tartom jövőre fő feladatomnak.

Megfelelő gépellátottság mellett a csoport 1/3-tól várható el a tankönyv 40—41. vagy 42/2. programjához hasonló szint. A 13. és 16. programhoz hasonló szinten minden tanulóm tud programozni. Az eddigi munkánk során nem voltak struktúragondok. Ha jövőre tanítom a GOSUB-ot, akkor bizonyára lesznek.

Véleményem szerint a kísérlet fizika tantervű része sikeresnek mondható, 26 óra alatt végeztük el.

A szövegalapú tantervet idő hiányában nem csináltuk végig, ehhez kb. 30 óra kellene.

ALMÁSI LÁSZLÓNÉ
általános iskolai tanár
Nagykálló

Néhány gondolat a számítástechnikai táborokról

Napjainkban a fejlett technikai színvonalat az elektronikus számítógépek képviselik.

Az elektronika gyors fejlődése a számítógépet, a film, írásvetítő és televízió mellett az iskolai oktatásban is szerephez juttatja. Ezért gondoltunk arra, hogy a fakultáció és szakkör mellett nyáron is lehetőséget biztosítunk a gyerekek számára a számítástechnika alapjainak megismerésére.

Már 2. éve szerveztük meg csodálatos környezetben a Nagykálló—Harangodon a 10 napig tartó sátortábort.

A szép környezet, a jó levegő az üdülést is biztosította. A szabadidős tevékenységek jó közösségformálók. A táborba esténként kilátogattak a szülők, akikkel igen sok közös programot szerveztünk, ez erősítette az iskola és a szülői ház kapcsolatát.

A táborban résztvevő 60 gyerek igen sok élménnyel, ismerettel gazdagodva térhetett haza.

Mindkét évben a gyerekek részvételi díja mindössze 500,— Ft volt. Ezért a tanulók napi 5-szöri étkezést kaptak, sátrat, gumimatracot. A szülők folyamatosan biztosították a friss gyümölcsöt. Természetesen első évben a hiányzó pénzt különböző vállalatoktól kaptuk. Az idén pedig kartársnőmmel Félegyházi, Józsefnéval készítettünk egy pályázatot számítástechnikai tábor szervezéséhez.

Ez a pályázat 30 000,— Ft-ot hozott, ezért ennek segítségével tudtuk megszervezni a tábort.

A következőkben szeretnék segítségére lenni mindazoknak, akik megpróbálják a számítástechnikai tábor szervezését.

A tábor általános napirendje volt:

7.00-kor ébresztő,
7.00— 7.45-ig reggeli torna, mosakodás, körletrend,
7.45— 8.00-ig a reggeli tevékenységek értékelése,
8.00— 8.30-ig reggeli,
8.30— 9.00-ig felkészülés a foglalkozásokra,
9.00—12.00-ig szakmai foglalkozás,
12.00—13.00-ig ebéd,
13.00—14.00-ig szabad program, pihenés,
14.00—16.00-ig szakmai program,
16.00—18.00-ig játék, sportprogram, vetélkedők,
18.00—18.30-ig a napi tevékenység értékelése,
18.30—19.00-ig vacsora,
19.00—21.00-ig szabadfoglalkozás, TV-nézés, vetélkedők, közös éneklések,
21.00—21.30-ig mosakodás, takarodó.

Részletes program a számítástechnikai foglalkozásokhoz

Kezdő csoport:

1. nap: Számítógépek kialakulása, a számítógép felépítése. A billentyűzet használata. Számok és műveletek. Műveletek sorrendje, műveleti jelek. A

PRINT, RETURN, vessző, pontosvessző használata. A változók fogalma, típusai. Egyszerű programok írása alapján a programozás főbb lépéseinek megismerése.

2. nap: Elágazás nélküli programok készítése. PRINT utasítással képernyő kezelés a kurzormozgató utasítások programba építésével TAB formula bevezetése. A változók cseréje.
INPUT utasítás bevezetése.

3. nap: Néhány gyakori függvény bevezetése. Programok írása az INT(x), SQR(x), RND(x) függvények segítségével. Elágazás nélküli programok írása, gyakorlása.

4. nap: Önálló programozás — gyakorlás.
Elágazásos algoritmus.
A folyamatábra szerepe a programozásban. Egyszerű feladat megoldásán keresztül az elágazásos algoritmus vizsgálata. Az IF...THEN kapcsolat bevezetése.

5. nap: Az elágazásos algoritmus gyakorlása.
Egy programban több elágazás.
Rendezések.

6. nap: A ciklus. A ciklus részei, működése.
Véges és végtelen ciklusok.
A tömb. Egy—két—háromdimenziós tömbök értelmezése, modellezése.

7. nap: Gyakorlás, programozás az eddig tanultak alapján.
Tömbök, ciklusok.

8. nap: Ciklusképző utasítás bevezetése
FOR..., TO..., STEP..., NEXT.

9. nap: Gyakorlás.
FOR..., TO..., STEP..., NEXT alapján.

10. nap: Verseny, programbörze.

Haladó csoport

1. nap: Ismétlés, Elágazás nélküli algoritmusok.
INPUT, PRINT, változók.
Elágazásos algoritmus.
IF...THEN és a GOTO kapcsolata
ciklus
FOR ..., NEXT ..., STEP.

2. nap: READ, DATA, RESTORE utasítások.
Adattárolás a programban.
A felhasználás ésszerű határai.
Gyakorlás.
GET A$ és TI$ bevezetése.

3. nap: Képernyőkezelés, grafika.
Grafikus üzemmód, pontok, vonalak, görbék, sokszögek, feliratok a képernyőn.

4. nap: Zene.
Hanggenerátorok használata.
Hanggenerátor és képernyő együttes használata.
Karakterfüzér függvények használata.

5. nap: Logikai műveletek.
AND, OR, NOT bevezetése,
ON ... GOTO.
Logikai áramkörök,
Logikai műveletek.

6. nap: Gyakorlás.
Programszerkesztés.
Zene.

7. nap: Gyakorlás.
Programszerkesztés.
Grafika.

8. nap: Kazettás egység.
Programok kimentése és beolvasása.
SAVE, LOAD, VERIFY használata.
Adattárolás kazettán.
Rekord, file (adatállomány),
soros file.

9. nap: Önálló programozás.
Saját programok futtatása.

10. nap: Verseny, programbörze.
Értékelés.

Szabadidős foglalkozások részletes programja

1. nap: Ismerekedési est.

2. nap: Számháború.
Irodalmi vetélkedő.

3. nap: Sportversenyek.
Történelmi vetélkedő.

4. nap: Kirándulás a környéken.
Környezetvédelmi vetélkedő.

5. nap: Tábori KI MIT TUD?

6. nap: Felkészülés a tábori karneválra.
Hangverseny megtekintése a faluban.

7. nap: Tábori Karnevál

8. nap: Rőzsegyűjtés.
Szalonnasütés.
Énekverseny.

9. nap: Készülődés a búcsúestre.
Búcsúest.

Időjárástól függően a programok felcserélhetők.

Mindenkit arra buzdítok, hogy próbáljanak számítástechnikai táborokat szervezni. Nagyon hasznos, igen sok ismerettel, élménnyel gazdagodhatnak a tanulók és tanárok egyaránt. Igaz, hogy néhány napot fel kell áldoznunk a szabadságunkból, de megéri, hiszen „Nincs jobb fegyelmező és tananyagrögzítő eszköz, mint a tanárt és a tanulót összekötő érzelmi kapocs".

HUBERT TIBOR
középiskolai tanár
Budapest

Egy számítástechnikai feladatgyűjteményről

Matematika—fizika tanárok ismerték fel az oktatásban a legkorábban a számítástechnika tanításának jelentőségét, és természetesen matematika—fizika tanárok félltették tantárgyaikat is a legjobban a számítástechnika eredményeitől (gondoljunk pl. a számológépek elterjedésének kezdetére).

A számítástechnika szakot is a mat.—fiz. tanárok végezték el legnagyobb számban.

A számítástechnika oktatási kísérleteket is többségükben ők vállalják.

A most megjelenő „Számítástechnikai feladatok 2000-ig" (az Országos Műszaki Információs Központ és Könyvtár kiadása) című számítástechnika feladatgyűjtemény készítői is többségükben matematika—fizika tanárok, akik azt a feladatot vállalták, hogy kétezernél több számítástechnika feladatot összegyűjtenek, és rendszereznek, hogy evvel megkönnyítsék a számítástechnikát oktatók munkáját.

Ez a feladatgyűjtemény a szokástól eltérően csak nagyon kevés feladat megoldását tartalmazza. Ennek több oka van. Egyrészt egy programozási feladat megoldása lényegesen hosszabb, mint a feladat szövege, és ez a könyv terjedelmét jelentősen megnövelte volna, másrészt egy feladatnak általában nem egyetlen megoldása lehet, hanem nagyon sokféle. Úgy gondoljuk, hogy ha ezekből csak egyet közlünk, azzal korlátozhatjuk a feladatmegoldók fantáziáját. Sok esetben a feladatok megfogalmazása nem teljesen részletezett, éppen amiatt, hogy megvalósításuk is sokszínűbb legyen. Könyvünk szerkezete követi a „Számítástechnika középfokon" című könyv felépítését, néhány új fejezettel kiegészítve. Ezért jól használhatják azok, akik az említett könyvből tanítanak vagy tanulnak, de ez a feladatgyűjtemény — jellegénél fogva is — a számítástechnikával foglalkozók széles körének szól. A feladatgyűjtemény fejezetei olyan témakörökről szólnak, amelyek a középiskolai tananyaghoz igazodnak. Minden fejezet elejére egy rövid bevezetést írtunk, amelyben összefoglaltuk a fejezet legfontosabb jellemvonásait, ezért javasoljuk ezek elolvasását. Itt gyakran találkozik az Olvasó irodalomjegyzékkel, amely egyrészt hivatkozik a forrásanyagra, másrészt tájékoztat a témakörben hozzáférhető fontosabb művekről. A fejezetek anyagát alfejezetekre osztottuk, amelyek szintén egy rövid bevezetővel kezdődnek. Itt sem szándékoztunk azonban részletes ismertetést adni az alfejezet tartalmáról, hiszen az megtalálható a javasolt szakirodalomban. Ez a bevezető inkább gondolatébresztő szeretne lenni. A könnyebb használhatóság kedvéért azonban a feladatokat fejezetenként sorszámoztuk. Minden feladathoz megállapítottunk egy nehézségi szintet. A könnyebb feladatok az 1-es nehézségűek, a 2-es nehézségűek megoldásához néhány óra szükséges, a 3-asok megoldása pedig több órába, napba kerülhet. Ez a nehézség jelent egyrészt programozási nehézséget, de ezzel általában összefügg a megírandó program hossza, illetve a megoldáshoz szükséges ismeretek köre.

Reméljük, hogy nemcsak a számítástechnikával foglalkozó tanárok fogadják örömmel majd e könyvet.

Könyvismertetés

ANTAL GÁBOR
szaktanácsadó
Salgótarján

Deák Kálmánné:

Ajánlás a gimnáziumi matematika szabad sáv tananyagához. (A Nógrád Megyei Pedagógiai Intézet kiadványa.)

Deák Kálmánné munkája az 1986/87-es tanévre meghirdetett Megyei Pedagógiai Pályázat felhívására készült el. A pályamunka első díjat kapott, a Megyei Pedagógiai Intézet intézeti kiadványként, 500 példányban könyvalakban megjelentette és a megyék Pedagógiai Intézeteihez eljuttatta.

A kiadvány anyaga a matematikát fakultatív keretben is tanító szaktanárok, illetve tanuló diákok számára jól hasznosítható szakmai-módszertani segédanyag, konkrét feladatgyűjtemény. Terjedelme 160 oldal.

Az anyag jó lehetőséget biztosít a szaktanárok számára a tanulók képességeinek megismeréséhez. Elősegíti a tehetségesebb tanulók kiválasztását, s ugyanekkor a kevésbé tehetségesek számára is biztosítja a sikerélményt. A tanulók önbizalmat, szakmai biztonságot nyernek a matematika tanulásához.

Ismeretes, hogy az 1982/83-as tanévtől kezdődően a gimnáziumok második osztályaiban, ún. szabad sáv keretében az érdeklődő tanulók matematikával is foglalkozhatnak. Az 1987/88-as tanévtől kezdve már a gimnáziumok első osztályaiban is választható matematika fakultáció. A fakultációs órákat az alaptantervi anyag elmélyítésére, minőségi bővítésére és az alkalmazások szélesebb körű bemutatására lehet felhasználni.

Deákné munkája eredetileg a „szabad sávos" matematikaórák megtartásához ad részletes tananyagjavaslatot. Az összeállítás két fő részből áll. Az első rész 36 foglalkozásra (72 órára) terjedően közöl konkrét feladatanyagot (kb. 300 példa). A második rész a feladatok megoldását tartalmazza, közli az eredményeket, rövid megoldási leírásokat ad, s ezekhez esetenként útmutatás is kapcsolódik.

A feladatanyag didaktikailag jól átgondolt, megtervezett, a fokozatosság elvét figyelembe vevő összeállítás. Az érdeklődést felkeltő, játékos feladatok mellett jelentős szerepet kapnak a gondolkodtató, fejlesztő, látókört szélesítő feladatok is.

A válogatás többek között foglalkozik területátalakításokkal, síkgeometriai szerkesztési, számítási és bizonyítási feladatokkal, számelméleti problémákkal, különféle függvények ábrázolásával és tulajdonságaik vizsgálatával, szélsőértékszámítással, egyenletek és egyenlőtlenségek vizsgálatával stb. A feldolgozásban helyet kapnak matematikatörténeti ismertetések is.

Az összeállítás felépítése, szerkezete, tartalma folytán alkalmas arra is, hogy a gimnáziumok első és második évfolyamán fakultációs keretben dolgozzák fel az anyagot. Az óraszámok megkétszerezésével ez közvetlenül megvalósítható, annál is inkább, mert az egyes feladatsorok mennyiségileg és minőségileg ezt lehetővé teszik, s szükség szerint a témák bármikor bővíthetők, szélesíthetők, sőt újabb témákkal is ki lehet egészíteni az anyagot.

Összességében elmondható, hogy a kiadvány anyaga a fakultációs órák mellett jól hasznosítható segédanyag a mindennapi oktató-nevelő munkában is. Felhasználható matematika-szakkörön, -versenyeken, a négyéves tananyag összefoglalásánál, az érettségi, illetve felvételi vizsgákra való felkészülésnél. Használatát a szaktanár kollégák számára minden tekintetben hasznosnak tartom a gimnáziumokban és a szakközépiskolákban egyaránt.

Vita

Az itt következő cikket vitaindítónak szánjuk. A benne megfogalmazott gondolatok bizonyára több olvasónkban is részben helyeslést, részben ellenvéleményt váltanak ki.

Várjuk a témához a hozzászólásokat.

A szerkesztő

DR. ÁBRAHÁM ISTVÁN—CSÉCS MIKLÓS
főiskolai tanár főiskolai tanársegéd
Pénzügyi és Számviteli Főiskola Zalaegerszegi Intézete

A matematika-felvételi vizsgáról

A felvételi vizsga kérdésében tömegek érdekeltek országunkban, akár közvetlenül mint felvételizők (vagy — és ez talán sajátosság — mint a felvételiző családtagja, jó ismerőse), akár közvetetten, hiszen a felsőoktatásból kerül ki az értelmiség, azok az emberek, akiknek tudása, alkotókedve meghatározója lehet az életszínvonalnak. A felvételi vizsgák körül nincs minden egészen rendben, ezt mutatja az is, hogy napirendre került a rendszer reformja. Írásunkban részben a reformvitához szeretnénk adalékokat adni, részben konkrét tapasztalataink közreadásával, a felvételi vizsgára felkészítő és a felvételi eljárásban közreműködő tanár kollégáink figyelmét szeretnénk felhívni néhány olyan dologra, amelyeket javítandónak érzünk. Mondanivalónkat elsősorban az 1987/88-as tanév végén tartott matematika-felvételi vizsgához, annak is főként az írásbeli részéhez kapcsoljuk, de szándékunk szerint általánosabb kérdéseket is érintünk.

A matematikadolgozatokkal foglalkozók tudják, hogy ezek az írások mindig egy kicsit jellemrajzok is. Ebből a szempontból az öröklött, genetikailag determinált vonások mellett jelentős a szerepe a környezeti hatásoknak, amit elsősorban a tárgyat oktató tanár határoz meg. Környezetként számolni kell az adott iskola matematikára hangoltságával, a tanuló és társai közötti kölcsönhatással, a szülők ambicionálásával, valamint sok egyéb tényező mellett a tantervek erősségei, gyengéi is felnagyítódnak a diákok munkáiban.

A konkrétumainkat az 1988. május 23-án írt „közgazdasági" írásbeli felvételi feladatsorhoz csatoljuk: egyrészt ezek a feladatok és azok javítópéldánya hozzáférhetőek, másrészt ez évben is elég nagyszámú (844 db), az ország különböző részeiben érettségizett diák által írt felvételi dolgozat ment keresztül a kezeinken. Felvételi vizsgán mintegy két évtizede működünk közre, és úgy láttuk, hogy hosszabb időszak alatt szerzett tapasztalataink viszonylag jól illusztrálhatók az ezévi felvételivel. Észrevételeinket megpróbáltuk csoportosítani:

1. A feladatmegoldások feltételrendszerének kérdései

Jó pár éve matematikából már követelmény, hogy egy adott probléma csak a feltételek tisztázásával oldható meg. Ennek logikus volta teljesen nyilvánvaló: valamennyien tudjuk, hogy milyen károkat okozott például a társadalomban, a gazdaságban, ha egy problémára egyfajta megoldást olyan esetben is alkalmazni próbáltak, amikor a feltételek ezt nem indokolták, illetve komoly gondok származtak abból is, ha az adott feltételek között érvényes törvényszerűséget megpróbálták semmibe venni. A feltételek tisztázása vonatkozásában az algebrában viszonylag könnyű a dolgunk: az adott reláció (pl. egyenlet) érvényességi körét

részben magunk deklaráljuk (pl. a megoldást az egész számok körében keressük), vagy az önmagától adódik, kizárásos alapon, jószerével három esetre korlátozódva: a nevező nulla, illetve négyzetgyök és a logaritmus kizáró feltételei. Évek óta tapasztaljuk, hogy mennyi a bizonytalanság ezen a területen. A felvételi feladatsor első feladata, a

$$\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}} = x-1$$

valós számhalmazon történő megoldásához a vizsgázók mintegy fele nem adott semmiféle feltételt, simán négyzetre emelgetett és — esetleg — a végén az $x=0$ megoldást ellenőrzéssel kizárta. Holott nyilvánvaló, hogy ha $|x|<\sqrt{24}$, a belső gyöknek, így az egész bal oldalnak, azaz a teljes egyenlőségnek nincs értelme a valós számkörben, így vele foglalkozni, négyzetre emelni sem lehet. Hasonló a helyzet akkor is — a négyzetgyök értelmezése miatt —, ha az $x<1$. Tehát szerintünk *hiba* — és ezt a hivatalos javítási útmutatóban szankcionálni kellett volna —, ha valaki az ún. induló feltételeket ilyenkor nem adja meg. Úgy tűnik, hogy a feltételek vonatkozásában – nemcsak a tanulók körében — eléggé általános a bizonytalanság, hiszen például a javítási útmutatóban is az szerepel (idézzük):

„(2) $x\cdot\sqrt{x^2-24} = x^2-2x.$

A (2) egyenletnek gyöke az $x=0$" — holott nyilvánvaló, hogy a (2) egyenlet megoldáshalmazába a valós számok körében a négyzetgyök miatt a nulla nem tartozhat.

Ugyanúgy hibának érezzük a felesleges feltételek megadását. Az az érzésünk, hogy a feladatmegoldók egy része így gondolkodik: inkább adjak több feltételt, mint kevesebbet, abból baj nem származhat. De bizony származhat! Gondoljunk csak bele, micsoda gátja lehet a munkának, az eredményes tevékenységnek a túlbiztosított feltételrendszer! És egyáltalán: alapvető hiba ott feltételt adni, ahol erre nincs szükség! A vizsgázók közül sokan például kikötötték (az $x^2\geqq 24$ és az $x\geqq 1$ után), hogy az $1+x\sqrt{x^2-24}\geqq 0$ és ezzel az egyenlőtlenséggel x kifejezése szándékával féloldalakat számoltak. Milyen felesleges időpazarlás! Vagy hasonlóan felesleges kikötések szerepeltek sok vizsgázónál a harmadik feladatban: $4^{x-2}+9>0$ és $2^{x-2}+1>0$, hiszen ezek a relációk triviálisan igazak. Ugyancsak időpocsékolásnak érezzük azt, ha valaki az induló feltételeket (pl.: $x^2-24\geqq 0$) explicit alakra hozza (többnyire sajnos hibásan: $x\geqq\pm$ $\pm\sqrt{24}$) akkor, ha a problémának egy, vagy néhány megoldása van, amikor is jóval „olcsóbb" dolog a kapott gyököknek a feltételekbe, illetve az eredeti egyenletbe történő helyettesítése. Természetesen szükség lehet az induló feltételben a változóra konkrétan megengedett értékek tisztázására, például egyenlőtlenség megoldásakor, vagy ha az egyenlőségből azonosság „jön ki". Ugyanakkor nem kezelhetjük felületesen az ún. műveleti feltételeket, tehát ha burkoltan „nullával osztunk", vagy „elhagyjuk a logaritmust", közölni kell, hogy miért tehetjük ezt.

2. *Szöveg a feladatmegoldásban*

Az idővel történő gazdálkodás, a „matematikus takarékosság" jegyében sajnos azt állapíthatjuk meg, hogy egyes feladatmegoldók túl sok szöveget szerepeltetnek a munkáikban. Láttunk olyan dolgozatot, amelyben a feladatsor első feladatát, a négyzetgyökös egyenletet a tanuló másfél oldalon oldotta meg, végig helyesen, minden lépését egész mondatos-körmondatos szöveggel kommentálva (ahogy például a javítási útmutató is leír ilyen mondatokat: „Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve kapjuk, hogy...", vagy: „Vonjunk ki

1-et mindkét oldalból!"). Az az érzésünk, hogy a matematikában az „irodalom" ilyetén való elburjánzása részben a példatárakban, a KÖMAL-ban közölt feladatmegoldások következménye, illetve egyfajta túlbiztosítás a tanuló részéről: „ha elhibázom a levezetést, a szövegemet esetleg akkor is értékelik", vagy pedig egyszerűen csak mennyiségi orientációt tükröz — csináljunk bolhából elefántot? Természetes, ha a tanulónak van kapacitása arra, hogy az összes feladatot matematikailag helyesen megoldva lépéseit-eredményeit „irodalmilag" kommentálja, ám élje ki az egyéniségét. De sajnos többnyire nem ez a helyzet: a feladatmegoldásra időkorlátok vannak, tehát a felvételi vizsgán is, mint az élet majdnem minden területén a teljesítmény (munka per idő) a mérce és elfogadott levezetésmód, rövidítések birtokában felesleges a terjedelmes szöveg a megoldásokban.

Ugyanakkor azt hisszük, hogy komoly problémákat jelez a szöveg, a szavakkal történő megfogalmazások hiánya a *szóbeli felvételi vizsgákon:* a vizsgázók aligalig tudnak korrektül elmondani egy-egy szabályt, definíciót és egyáltalán: nem tudnak beszélni „matematikául". Úgy érezzük, hogy ez nemcsak grammatikai-retorikai hiányosság: bár a matematika alapvetően elméleti tudomány, a középiskolában — főként a szakközépiskolákban — túlzottan eltolódott a hangsúly a feladatmegoldásokra, az írásbeliségre. Kérdésünkre egyes vizsgázóink elmondták, hogy ők nem szoktak szóban felelni matematikából; előfordultak olyan tanulók is, akik középiskolában egyetlen egyszer sem feleltek szóban matematikából! Mennyire lehetünk akkor mi főiskolai matematika kollokviumon „következetesek" a pontatlanul fogalmazó, szavakat keresgélő hallgatóinkkal? Mert hát megbuktatni sem lehet mindenkit, de vizsgajegyeinket sem engedhetjük devalválódni.

3. *A megoldások formája*

Sok kritikát fűzhetünk a feladatmegoldások kivitelezéséhez. Tévedés ne essék: nem elsősorban a szépírás hiányát, az áthúzogatásokat tesszük szóvá, hiszen mint tudjuk, nincs királyi út, az eredmények gyakran izgatott állapotban, tévedésekkel kísérten születnek; továbbá igaz, hogy a matematikában úgy is jöttek már létre nagy dolgok, hogy emberek az ujjukkal a homokban rajzolgattak... Inkább egyfajta áttekinthetőséget, logikai rendet, ha úgy tetszik, *szabványt hiányolunk* a feladatmegoldásokban: a bemenő és kimenő adatok elkülönítettséget, egységesebb jelöléseket, a kevésbé lényeges levezetések, számítások perifériára kerülését, a vázlat és a szerkesztett rajz megkülönböztetését szorgalmazzuk például. És azért egy kicsit a szép külalakot is... Ennek hiánya a feladatsor ötödik feladatának megoldási kísérleteinél nyilvánvaló volt: ha a vizsgázó csak vázlatrajzot készített a koordináta-geometriai feladatra, esetleg kódolta a háromszög pontjait, vonalait a többé-kevésbé pontos rajz helyett, akkor nehezen, illetve többnyire egyáltalán nem jutott el a megoldásig. Ennél a feladatnál szembeszökő volt a *megoldási tervek kiirtottsága:* senkinél sem találtunk ilyent. Természetes, mesterségesen ne gyártsunk megoldási tervet, ha a munkán amúgy is látszik a tervszerűség, de a mindennapi életben is általában elkülönül egy adott probléma megoldásánál a szellemi kidolgozás a végrehajtástól, a kivitelezéstől; nem ártana jobban rászorítani erre a tanulókat is.

Ugyancsak formai ügynek tűnhet a *zárójelhasználat:* nagyon gyakran hibáznak e téren a tanulók, olyan sokszor, hogy úgy érezzük, talán elnézték nekik korábban ezt a hibát. Pedig a zárójelhasználat a matematikai intelligencia

egyik fokmérője. Nagy a zűrzavar a számolásoknál a *kerekítésnél:* a zsebszámológép által kijelzett sok számjegy kísértése nagy, hogy eredményként le is írjuk azokat. De ha a bemenő adatok csak három jegy pontosságúak, végeredményként 8 jegyet megadni már nem „pontosítás", hanem hiba! A tanulók munkáin az látszik, hogy a zsebszámológép használata nincs még megfelelően beillesztve a matematika oktatásába. Ebből a szempontból segítséget jelenthetne az is, ha az érettségi-felvételi feladatsorok feladatai jobban zsebszámológép használat feltételezők lennének. Egyúttal a *javítási útmutató megoldásai* is lehetnének jobban az átlag tanulóra méretezettek: például a feladatsor 5. feladatát elég sokan megoldották, de az Útmutatóban közölt módon senki, így ilyenkor a pontozáshoz nem nagyon ad útmutatást az Útmutató.

A formai kérdések kapcsán meg kell jegyeznünk, hogy a felvételi dolgozatokat javító egyes *tanárok javítási technikájában* is nagy eltérések vannak. Találkozhatunk olyan javítással, hogy a megoldás végén az egyetlen „piros", a javításra utaló jelzés a pontszám (mégpedig nem a teljes adható pontszám): a javító kolléga szubjektíven mérlegelt? Vagy — nem ritkán — előfordul, hogy a javítást végző indulatosan pirossal áthuzza a teljes — többé vagy kevésbé rossz— megoldást és esetleg ad rá valamennyi pontot. Azt hisszük, hogy a tanári szabadság megvalósulásának nem lehet színtere a dolgozatjavítás.

A dolgozatok pontozásáról szólva meg kell említenünk egy érdekes, de elég általános furcsaságot: a hozzánk kerülő, nem nálunk javított felvételi dolgozatok pontszáma többször magasabb, mint amit az Útmutató alapján mi adnánk rá, illetve magasabb, mint az érettségi dolgozat (ami, tudjuk, a felvételi dolgozat másolata) pontszáma. Jobb a békesség? Pontozzuk fel egy kicsit a dolgozatot és akkor nem lesz reklamáció? Jó ez így?

Ugyanakkor a pontozással kapcsolatban egy konkrét esetről is szeretnénk szólni: az egyik felvételi vizsgabizottságban a tanuló matematika dolgozata jóindulatú javítással 12 pontos (12%) volt. Az illető érettségi bizonyítványában matematikából közepes szerepelt. A vizsgáztató tanár megkérdezte a tanulót, hogy miből szóbelizett, hogyan javított az érettségin, hiszen erre a pontszámra ott elégtelent kellett kapnia. Kiderült, az érettségin szóbelire nem került sor, hanem az érettségiztető bizottság döntött úgy, hogy a tanuló egyéb érdemeire tekintettel erre a pontszámra közepest ad neki. Mindezt írásban is közölte velünk megkeresésünkre a középiskola igazgatója. Hát, egy kicsit félünk attól, hogy az érettségi lesz a felvétel egyik meghatározója.

4. A bizonyítások...

A matematikadolgozatokkal foglalkozók által ismert tény: ha egy feladatnál az „igazoljuk", vagy „bizonyítsa be" szó van, akkor a feladattal eredményesen foglalkozók száma törtrésze az ún. számolásos feladatokat megoldókénak. Pedig az ilyen feladatok ideológiai transzfer hatását alig lehet túlbecsülni. Nem hinnénk, hogy a középiskolákat végzettek ennyire gyengék lennének az indoklásokban: a 844 dolgozatban senki nem oldotta meg teljesen sem az A, sem a B sorozat bizonyításos 8. feladatát, holott mindkettő tulajdonképpen egyszerű volt. Időhiány? Azt hisszük, az nem lehetett indok, hiszen például a feladatlapon előrébb levő A sorozat 6. feladatát (ahol szintén leírták a bűvös „igazolja" szót) sem oldotta meg teljesen senki; úgy érezzük, hogy a tanterv és az ellenőrzés kialakult rendszere is hibás egy kicsit ebben: több, esetleg kisebb, egyszerűbb bizonyítást kellene feladni és legalább a matematikaigényes értelmiségi pályákra

igyekvőktől következetesen be is vasalni azokat. Ez persze, tudjuk, nem egyszerű feladat, de a metodikai diskurzusoknak ilyen irányt is lehetne adni.

Feltűnő volt viszont, hogy nőtt a vizsgázókban a vállalkozási kedv: olyanok is megpróbálkoztak a bizonyításos feladatokkal, akik, megoldási kísérletükből kikövetkeztethetően azt sem értették, miről is van szó. Ki kell mondanunk: sajnos, ez is társadalmi jelenség: el kellene már egyszer érni, hogy ne preferáljuk azokat, akik egy adott probléma felvetődésekor rögtön hozzá nem értő „hősiességgel" megszólalnak, hozzászólnak, aktivitást mímelnek, talán a vak tyúk is talál szemet alapon. Ebbe a hibába még, úgy érezzük a Javítási útmutató is beleesik (8. B. feladat): ha valaki felírja azt, hogy:

$$a^2+b^2 = (a+b)^2-2ab = 1-2ab$$

(mert a feladatban adott: $a+b=1$), már kap 3 pontot, és ha az a^4+b^4-re felveszi, hogy ez egyenlő $(1-2ab)^2-2a^2b^2$, további 4 pontot kap. Holott a feladat lényegéről, az egyenlőtlenség kimutatásáról — esetleg a megoldásban — szó sem esik. Igen, persze, a javító tanáron múlik, hogy ilyenkor kiadja-e a pontot, de mit tegyen a felvételi vizsgabizottság tagja, ha a javítási útmutató alapján kiokosított reklamáló felvételiző kéri — a neki járó? — pontszámát?

A felsőoktatásba történő bejutást célzó reform javaslatok között szerepel az, hogy a középiskolai tanulmányi eredmény, az érettségi minősítése kapjon nagyobb szerepet a felvételnél.

Egyet tudunk érteni ezzel az elvvel, hiszen ez erősítheti a középiskolának a felsőoktatásra előkészítő funkcióját. De a felvételi vizsgára még egy ideig szükség lesz: korlátlan számban nem vehetők fel a hallgatók a felsőfokú intézményekbe és csak a középiskolai érdemjegyek alapján szelektálni ma még merész dolog lenne. Az adott pálya évi becsült szakember utánpótlás igénye feletti 25—50%-os bekerülési létszámot elképzelhetőnek tartjuk: jótékony hatással lenne a képzettek tudására a felsőoktatásban a nagyobb szelekció lehetősége, a versenyhelyzet. Természetesen a létszámbővítésnek nagyon sokirányú vonzata van, amelyeknek taglalását nem tekintettük feladatunknak, csupán a bevezetőben jelzetteknek megfelelően néhány észrevételt kívántunk közreadni azzal a céllal, hogy felkészültebb, igazságosabb kiválasztott diákok kerüljenek be a matematika felvételivel a felsőoktatásba.

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor utca 10., II. 10., 1052.

Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! (Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is!) A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: A lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1197. Kiszíneztünk négy (általános helyzetű) pontot négy színnel: pirossal, kékkel, zölddel és sárgával. Ezután kiszíneztük a pontok által meghatározott szakaszokat is úgy, hogy azok színe megegyezett valamelyik végpontjuk színével, és közben mind a négy színt újra felhasználtuk. Mutassuk meg, hogy mindig van olyan pont, hogy

a) vagy a belőlük kifutó szakaszok közül,

b) vagy a másik három pont közti szakaszok közül az egyik piros, a másik kék, a harmadik pedig zöld!

1198. Igazoljuk, hogy mindama másodfokú: $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény esetén, melyre $f(-x)=f(x+1)$, az f minimuma is, maximuma is állandó!

Nagy-Baló András, Budapest

1199. Hány olyan trapéz van, amelynek csúcsai egy szabályos n-szög csúcsaiból valók?

1200. Melyek azok a tízes számrendszerbeli n-jegyű számok, amelyek számjegyeit bármilyen sorrendbe írva n-jegyű négyzetszámot kapunk?

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

1201. Egy háromszög szögei legyenek α, β és γ, félkerülete s és a háromszög köré írt kör sugara r. Mutassuk meg:

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \leqq 4\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^3 \frac{r}{s}.$$

Dezső Gábor, Kolozsvár

1202. Adott kör köré írható-e két egyenlő területű, de nem egybevágó háromszög?

Péter Árpád, Sepsiszentgyörgy

Feladatmegoldások (1173—1178.)

1173. A bíróságon az A, B és C tanúk ugyanazokra a kérdésekre válaszoltak, mindegyikre igennel vagy nemmel. Azokra a kérdésekre, amelyekre B és C is igennel válaszolt, A is igent mondott; amelyekre A mondott igent, azokra B is és amelyekre B igent mondott, azokra igent mondott A és C közül legalább az egyik is.

Van-e olyan kérdés, amelyre A és B különböző választ adott?

I. megoldás: Elég megmutatnunk, hogy

a) ha A igent mondott, akkor igent mondott B is;

b) ha B igent mondott, akkor A is,

mivel ezekből következik, hogy A és B egyforma válaszokat adott.

Az *a)* állítás a feladat egyik feltétele. A *b)* viszont abból következik, hogy ha B igent mondott, akkor A és C közül legalább az egyik is. Ha ez az A, akkor készen vagyunk; ha pedig C, akkor a kérdésre B és C egyaránt igent válaszolt, így a feladat feltétele szerint A is igent mondott, ami éppen a *b)* állítást adja.

Bencze Mihály, Brassó,
Bíró Gábor, Kisvárda

II. megoldás: Jelölje rendre A, B és C azoknak a kérdéseknek halmazát, amelyekre A, B, illetve C igennel válaszolt.

A feladatbeli feltételek szerint:

(1) $$B \cap C \subseteq A$$

(2) $$A \subseteq B$$

(3) $$B \subseteq A \cup C.$$

Azt igazoljuk, hogy $B \subseteq A$, mert ebből (2) miatt az

$$A = B$$

következik, vagyis A és B bármely kérdésre egyformán válaszolt.

A (3) miatt — felhasználva a disztributivitást is —

$$B = B \cap B \subseteq (A \cup C) \cap B = (A \cap B) \cup (B \cap C).$$

Mivel a (2)-ből $A \cap B = A$ ezért az (1) figyelembevételével

$$(A \cap B) \cup (B \cap C) \subseteq A,$$

vagyis

$$B \subseteq A$$

és ezt kellett igazolnunk.

Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza

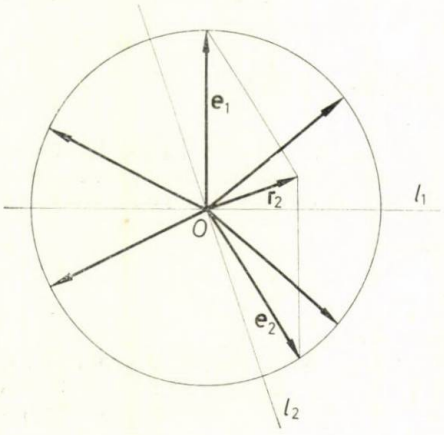
A megoldók száma: 16.

1174. Adott a síkban n egységvektor, melyek eredője a **0**. Bizonyítsuk be: minden $1 \leqq k \leqq n$-re van közöttük k olyan, amelyek eredőjének hossza legfeljebb 3.

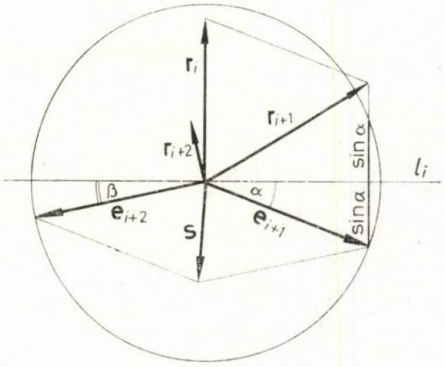
Megoldás: A közös O kezdőpontú $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ egységvektorok közül válasszuk ki az $\mathbf{e}_1$-t és kezdőpontjára illesszük a rá merlőeges l_1 egyenest *(1. ábra)*. Az l_1 egyenes adta két félsík mindegyikének belsejébe mutat az n darab egységvektor közül legalább egy-egy, különben nem lenne

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i = \mathbf{0}.$$

Az $\mathbf{e}_1$-től így elválasztott egységvektorok közül adjuk $\mathbf{e}_1$-hez a vele legnagyobb szöget bezárót (legyen ez az $\mathbf{e}_2$), s jelöljük ezek eredőjét $\mathbf{r}_2$-vel. Az $\mathbf{r}_2$-re O-ban állított l_2 merőlegesnek $\mathbf{r}_2$-vel ellentétes oldalán is van egységvektor az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ vektoron kívül, mert ellenkező esetben az $\mathbf{r}_2$-höz még hozzáadandó vektorok eredője nem lehetne **0**. Ezt az eljárást folytatva, ha minden újabb és újabb (O kezdőpontú) $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \ldots, \mathbf{r}_n$ vektor végpontja az O közepű egységsugarú körlemezen van, akkor minden k-ra van k darab egységvektor, melyek eredőjének hossza legfeljebb 1.



1. ábra



2. ábra

Lehetséges azonban az is, hogy a felsoroltak között valamelyik eredő hossza 1-nél nagyobb. Ekkor a következőt tegyük:

Legyen az $\mathbf{e}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \ldots, \mathbf{r}_k$ sorozatban $\mathbf{r}_i$ (az első i darab fenti módon kiválasztott egységvektor eredője) hossza még nem nagyobb 1-nél, de az $\mathbf{r}_i$-vel legnagyobb szöget adó $\mathbf{e}_{i+1}$ egységvektorra az $\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \mathbf{e}_{i+1}$ hossza 1-nél nagyobb *(2. ábra)*.

$|\mathbf{r}_{i+1}| > 1$ csak akkor, ha $2 \sin \alpha < |\mathbf{r}_i| \leqq 1$, azaz ha $\alpha < \frac{\pi}{6}$; emellett $(\mathbf{e}_{i+1}, \mathbf{r}_i) \sphericalangle > \frac{\pi}{2}$ miatt $|\mathbf{r}_{i+1}| < \sqrt{2}$ is teljesül.

Mivel az l_i egyenes $\mathbf{r}_i$-től nem csak az $\mathbf{e}_{i+1}$ vektort választja el, különben $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$ nem állhat fenn, ezért $(\mathbf{e}_{i+2}, \mathbf{r}_i) \sphericalangle = \frac{\pi}{2} + \beta$, és $\beta \leqq \alpha$ az $\mathbf{e}_{i+1}$ választása miatt. Így $(\mathbf{e}_{i+1}, \mathbf{e}_{i+2}) \sphericalangle > \frac{2\pi}{3}$, tehát

az $\mathbf{s}=\mathbf{e}_{i+1}+\mathbf{e}_{i+2}$ eredőre

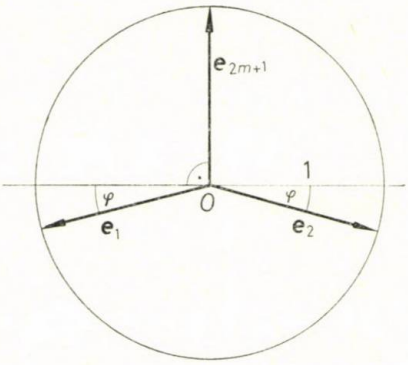
$$\mathbf{s}^2 = \mathbf{e}_{i+1}^2+\mathbf{e}_{i+2}^2-2\,|\mathbf{e}_{i+1}|\,|\mathbf{e}_{i+2}|\cos(\alpha+\beta) = 2-2\cos(\alpha+\beta) < 1,$$

hiszen $\alpha+\beta<\frac{\pi}{3}$ és így $\cos(\alpha+\beta)>\frac{1}{2}$, azaz $|\mathbf{s}|<1$. Az $\mathbf{r}_{i+2}=\mathbf{s}+\mathbf{r}_i$ összetevői így 1-nél nem nagyobbak és

$$(\mathbf{s}, \mathbf{r}_i)\sphericalangle > \frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}(\mathbf{e}_{i+1}, \mathbf{e}_{i+2})\sphericalangle > \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6},$$

tehát $|\mathbf{r}_{i+2}|\leqq 1$, mintz at az $\mathbf{s}$ és az $\mathbf{r}_i$ által kifeszített háromszögre vonatkozó cosinus-tételből nyerjük.

Beláttuk tehát, hogy az $\{\mathbf{r}_i\}$ sorozat mindig megválasztható úgy, hogy bármelyik tagjának hossza $\sqrt{2}$-nél nem nagyobb. Ezzel a feladat állításánál többet igazoltunk!



3. ábra

A *3. ábra* jelöléseivel legyen $\sin\varphi=\frac{1}{4m}$ és $\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_3=\ldots=\mathbf{e}_{2m-1}=\mathbf{e}_{2m+2}=\ldots=\mathbf{e}_{4m}$, továbbá $\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_4=\ldots=\mathbf{e}_{2m}=\mathbf{e}_{2m+3}=\ldots=\mathbf{e}_{4m+1}$. $\sum_{i=1}^{4m+1}\mathbf{e}_i=\mathbf{0}$ mellett, ha $k=2m+2$, úgy $|\mathbf{r}_k|=|\sum_{i=1}^{k}\mathbf{e}_i|=\sqrt{\frac{5}{4}-\frac{1}{4m}}$, amt arra utal, hogy az egységvektorok eredőjének a hossza $\frac{\sqrt{5}}{2}$-nél kisebb nem lehet.

Hajna János, Pécs

A megoldók száma: 1.

1175. Oldjuk meg a természetes számok halmazán az

$$xy = zt,$$
$$x^2-y^2 = z^2+t^2$$

egyenletrendszert!

Sándor József, Farcád

Megoldás: Tegyük fel, hogy $y=0$. Ekkor az első egyenletből $z=0$, vagy $t=0$ kell legyen, ennélfogva az $(x; 0; 0; x)$, illetve az $(x; 0;, x; 0)$ számnégyesek minden x természetes számra megoldásai az egyenletrendszernek.

Írjuk az első egyenletünket az

$$\frac{x}{z} = \frac{t}{y}$$

alakba. Feltehető, hogy $(x; z)=1$.

Így létezik k egész szám úgy, hogy $t=kx$ és $y=kz$. Ekkor második egyenletünk:

$x^2-(kz)^2=z^2+(kz)^2$, vagy rendezés után $x^2(1-k^2)=z^2(1+k^2)$, illetve $\frac{x^2}{z^2}=\frac{1+k^2}{1-k^2}$.

$(x; z)=1$ miatt $(x^2; z^2)=1$ is teljesül. Létezik tehát a egész szám úgy, hogy $1+k^2=ax^2$ és $1-k^2=az^2$. E két egyenletet összeadva $2=a(x^2+z^2)$ következik. Ebből $a=1$, $x^2+z^2=2$ vagy $a=2$, $x^2+z^2=1$ adódik.

Az első esetben $x=z=1$, $k=0$, vagyis $y=t=0$, míg a második esetben $x=1$, $z=0$, tehát $y=0$ következik, azaz a már felsoroltaktól különböző megoldás nincs.

Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 9.

1176. Az $OABC$ tetraéder O csúcsára illeszkedő élek páronként merőlegesek; az ABC lap belső M pontjának a többi laptól való távolsága rendre x, y és z, az O csúcsnak az ABC laptól való távolsága h.

Bizonyítsuk be:

$$x^2+y^2+z^2 \geqq h^2!$$

Varga István, Nagyszalonta

Megoldás: A (térbeli) derékszögű koordináta-rendszer x, y és z tengelyeinek pozitív fele legyen a tetraéder OA, OB és OC élei által definiált (l. ábrát a borítón). Így az M pont koordinátái éppen az M-nek a többi laptól való x, y, z távolságai.
Az OM távolság a térbeli Pitagorasz-tétel szerint

$$OM = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

és $h \leqq OM$, hiszen O-t az ABC sík pontjaival összekötő szakaszok közül a talppontjával adódó szakasz a legrövidebb. Így

$$h^2 \leqq x^2+y^2+z^2$$

és az egyenlőség is csak akkor, ha M az $ABC_\triangle$ magasságpontja.

Horváth Géza, Zseliz,
Tóth László, Szatmár

A megoldók száma: 16.

1177. Igazoljuk, hogy ha az $A_1A_2...A_n$ ($n \geqq 3$) konvex n-szög szögeinek sinusai közül bármelyik három számtani, az ezek sorrendjének megfelelő három szög cosinusának abszolútértéke pedig mértani sorozatot ad, akkor a sokszög szabályos!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: A feladat állítása hamis! Ellenpéldaként említeni elegendő (a sok közül) egy olyan paralelogrammát, amely nem négyzet.
(A feladat ellenőrizetlen kitűzése a rovatvezető lelkén szárad. Elnézést kérek mind a Szerzőtől, mind az Olvasótól! *A rovatvezető.*)
Vizsgáljuk meg, hogy a feladat feltételei mely konvex n-szögre teljesülhetnek!
Jelölje a sokszög A_i csúcsánál levő szögét is A_i. A feltételek szerint

$$2 \sin A_k = \sin A_i + \sin A_j \quad (i \neq j \neq k \in \{1, 2, ..., n\},$$

és

$$\cos^2 A_k = |\cos A_i|\,|\cos A_j|.$$

Az első egyenlet négyzetéből a második négyszerese így alakítható:

$$4 = \sin^2 A_i + \sin^2 A_j + 2 \sin A_i \sin A_j + 4 |\cos A_i|\,|\cos A_j|,$$

ez viszont a $2 \sin^2 A_i + 2 \sin^2 A_j + 2 \cos^2 A_i + 2 \cos^2 A_j = 4$ miatt ekvivalens a

$$(\sin A_i - \sin A_j)^2 + 2(|\cos A_i| - |\cos A_j|)^2 = 0$$

egyenlettel.
Eszerint

$$\sin A_i = \sin A_j$$

és

$$|\cos A_i| = |\cos A_j|$$

kell teljesüljön. Mivel i, j és k választása tetszőleges volt, ezért

$$\sin A_1 = \sin A_2 = \ldots = \sin A_n$$

(és ebből már adódóan

$$|\cos A_1| = |\cos A_2| = \ldots = |\cos A_n|)$$

fenn kell álljon. E feltételek pedig kielégítik a feladatbeli megszorításokat. A $0 < A_i < \pi$, $1 \leqq i \leqq n$ mellett

$$\sin A_j = \sin A_k$$

azt jelenti, hogy

$$A_j = A_k \quad \text{vagy} \quad A_j + A_k = \pi.$$

Ez utóbbi esetben legyen

$$A_j = \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad \text{és} \quad A_k = \frac{\pi}{2} + \varepsilon,$$

ahol $0 \leqq \varepsilon < \frac{\pi}{2}$.

Legyen a feladat szerinti konvex n-szögnek m darab $\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$ és $(n-m)$ darab $\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)$ szöge. A

szögösszegtétel miatt így $m\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)+(n-m)\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)=(n-2)\pi$, azaz

$$(n-2m)\,\varepsilon=\frac{\pi}{2}\,n-2\pi. \tag{1}$$

Az (1) megoldásait vizsgáljuk.

— Ha $n-2m=0$, úgy $n=4$, $m=2$ kell legyen és ezek szerint *minden szimmetrikus trapéz*, továbbá *minden paralelogramma* kielégíti (1)-et és a feladatbeli feltételeket.

— Ha $n-2m\neq 0$, akkor (1)-ből

$$\varepsilon=\frac{n-4}{n-2m}\,\frac{\pi}{2},$$

Mivel $0\leqq\varepsilon<\pi$, ezért

$$0\leqq\frac{n-4}{n-2m}<1 \quad \text{kell legyen.} \tag{2}$$

— Ha most $n>2m$, úgy (2)-ből $4\leqq n$ és $m<2$ és

$$\varepsilon=\frac{n-4}{n-2m}$$

Így $m=1$-re

$$\varepsilon=\frac{n-4}{n-2}\,\frac{\pi}{2},$$

tehát a legalább 4-oldalú sokszögnek van egy $\frac{\pi}{2}-\frac{n-4}{n-2}\,\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{n-2}$ és $n-1$ darab $\frac{n-3}{n-2}\pi$ nagyságú szöge, míg $m=0$-ra minden szög $\frac{n-2}{n}\pi$.

Minden ilyen sokszög a feladat feltételei szerint való.

— Ha viszont $n<2m$, akkor — lévén a konvex sokszög külső szögeinek összege 2π — $m\leqq 4$, és (2) miatt $m>2$.

Így $m=3$-ra $n=3$ vagy $n=4$, míg
$m=4$-re $n=4$.

Ezekből pedig a szabályos háromszög illetve a téglalap adódik.

Ezzel beláttuk: *ha egy konvex n-szög szögeinek sinusai közül bármelyik három számtani, az ezek sorrendjének megfelelő három szög cosinusainak abszolútértéke pedig mértani sorozatot ad, akkor*

$n=3$-ra a sokszög szabályos;

n=4-re a sokszög szimmetrikus trapéz vagy paralelogramma;

$n>4$-re a sokszög minden szöge egyenlő, vagy

egy szöge $\frac{\pi}{n-2}$, a többi $\frac{n-3}{n-2}\pi$ nagyságú.

Hajna János, Pécs

A megoldók száma: 8.

1178. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}^{-1}=\frac{1}{2n+2}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}^{-1}$$

minden n természetes számra!

Cseh László, Székelyudvarhely

Megoldás: Alkalmazzuk az

$$\binom{n}{k}^{-1}=\frac{n+1}{n+2}\left[\binom{n+1}{k}^{-1}+\binom{n+1}{k+1}^{-1}\right]$$

azonosságot, melynek bizonyítása azonnali:

$$\frac{n+1}{n+2}\left[\binom{n+1}{k}^{-1}+\binom{n+1}{k+1}^{-1}\right]=\frac{n+1}{n+2}\left[\frac{k!(n+1-k)!}{(n+k)!}+\frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+1)!}\right]=$$

$$=\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{k!(n-k)!(n+1-k+k+1)}{(n+1)!}=\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{k!(n-k)!(n+2)}{(n+1)!}=\frac{k!(n-k)!}{n!}=\binom{n}{k}^{-1}.$$

Így n helyett $2n$-et, k helyett pedig $2k$-t írva kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}^{-1}=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{2n+1}{2n+2}\left[\binom{2n+2}{2k}^{-1}+\binom{2n+1}{2k+1}^{-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{2n+2}\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{2n+1}{2k}^{-1}+\binom{2n+1}{2k+1}^{-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{2n+2}\left[\binom{2n+1}{0}^{-1}+\binom{2n+1}{1}^{-1}+\binom{2n+1}{2}^{-1}+\binom{2n+1}{3}^{-1}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\binom{2n+1}{2n}^{-1}+\binom{2n+1}{2n+1}^{-1}\right]=\frac{1}{2n+2}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}^{-1}.$$

Petkes Gergely, Nagykároly
Tóth László, Szatmár
Varga István, Nagyszalonta

A megoldók száma: 11.

A megoldók névsora (1173—1178.)

Bagi Gábor, Barcs (1173., 1176., 1177.); Bencze Mihály, Brassó (1173., 1175—1178.); Bíró Bálint, Eger (1173.); Bíró Gábor, Kisvárda (1173., 1175—1177.); Boda Miklós, Pécs (1173., 1176., 1178.); Csepreginé Ambrus Gabriella, Budapest (1173., 1175.); Csorba Ferenc, Győr (1173., 1175—1178.); Hajna János, Pécs (1173—1178.); Horváth Géza, Zselíz (1173., 1176.); Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (1173. 2 mód, 1176—1178.); Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép (1176.); Mészáros József, Galánta (1176.); Petkes Gergely, Nagykároly (1173., 1176—1178.); Simon József, Csíkszereda (1173., 1176., 1178.); Solymár Zoltán, Kalocsa (1173., 1175., 1176.); Tóth György, Szolnok (1176.); Tóth László, Szatmár (1173., 1176., 1178.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (1173., 1175., 1176., 1178.); Varga István, Nagyszalonta (1173., 1175. 2. mód, 1176. 2 mód, 1178.).

Katz Sándor: **Függvények korszerű felfogásban**

A könyv első része a függvényfogalom fejlődését tekinti át. A második részben vizsgálja, hogy a korszerű matematikai ismeretek nyújtásához milyen szintű függvényfogalmat célszerű kialakítani a középiskolában.

A tanároknak segítséget nyújt az oktatásban, mert a függvények tanításának egy lehetséges módszerét mutatja meg. (R. sz. 53104)

Imreczéné—Urbán—Reiman: **Fejtörő feladatok felsősöknek**

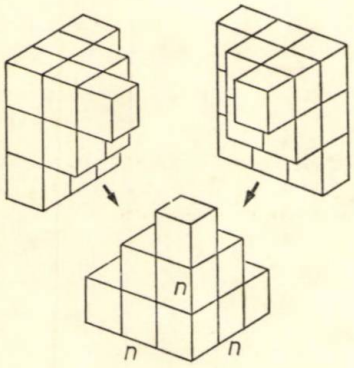
A könyv az általános iskolai felső tagozatos szakkörök számára készült, de a matematika iránt érdeklődőbb tanulókat is segíti az önálló munkájukban.

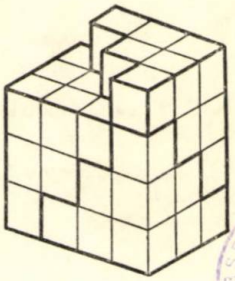
Az iskolarádió „Törd a fejed" című 3 éves műsorának és a Kis Matematikusok Baráti körei 3 évben rendezett versenyeinek feladatait tartalmazza. A feladatok megoldásának közléséhez magyarázatok fűződnek. A feladatok az új matematika tantervhez, annak témaköreihez kapcsolódnak (R. sz. 19 030) Szakköri füzet.

A kiadvány megrendelését a Tankönyvkiadó Vállalat Kereskedelmi osztályának címére (1055 Budapest, Szalay u. 10—14.) kérjük.

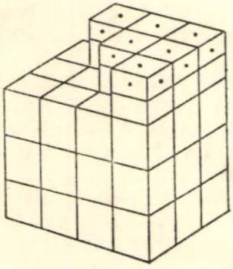
A Matematika Tanítása

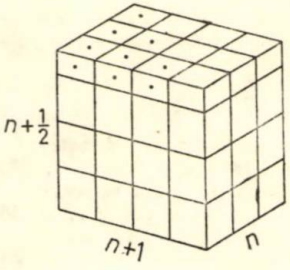
A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata





VESZPRÉM MEGYEI KÖNYVTÁR
KÉSZOLNOK





1989. XXXVI. évfolyam 2 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
URBÁN JÁNOS

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:
ÁCS PÁL, ELŐD ISTVÁNNÉ, HÓDI ENDRE, DR. KOLLER LÁSZLÓNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, LAJOS JÓZSEFNÉ, NÉMETHY KATALIN, PÁLMAY LÓRÁNT, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZENDREI JULIANNA, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

89-799 — Szegedi Nyomda
F. v.: Surányi Tibor igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 42,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 7,— Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy a közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő adatokat is:
a) személyi számukat, *b)* asszonyok leánykori nevüket, *c)* lakáscímüket — irányítószámmal, *d)* foglalkozásukat (beosztásukat), *e)* munkahelyük pontos megnevezését, (nyugdíjasok törzsszámukat), *f)* munkahelyük címét — irányítószámmal.

TARTALOM

Lajos Józsefné: Az általános iskolai matematikaverseny országos kipróbálása.... 33
Dr. Kántor Sándorné: Matematikai versenytesztekről I. 36
Róka Sándor: Válogatás a moszkvai matematikaversenyek feladataiból 45
Dr. Berényi Zsuzsanna Ágnes: Nőies-e a matematika? 51
Békefi Zsuzsa: Hozzászólás „A matematika felvételi vizsgákról" című cikkhez..... 53
Gémes Margit: Felhívás a matematikatanárokhoz 55
ÖTLETSAROK: *Dr. Kántor Sándorné:* Gondolatok az ICME—6 kongresszus után..... 56
FELADATOK 61

СОДЕРЖАНИЕ

Лайош Йожефнэ: Испытание общегосударственного конкурса по математике в восьмилетней школе 33
д-р Кантор Шандорнэ: О конкурсных тестах по математике I. 36
Рока Шандор: Выбор задач из материалов московского конкурса по математике 45
д-р Береши Жужанна Агнеш: Женственна ли математика? 51
Бекефи Жужа: Высказывание о статье: «О вступительных экзаменах по математике» 53
Гемеш Маргит: Обращение к учителям математики 55
УГОЛОК ИДЕЙ .....
д-р Кантор Шандорнэ: Мысли после конгресса ICME—6 56
ЗАДАЧИ..... 61

INHALTSVERZEICHNIS

Lajos Józsefné: Landeswettbewerb in Mathematik für die Grundschulen — ein Versuch 33
Dr. Kántor Sándorné: Über die Tests im Mathematikwettbewerb I..... 36
Róka Sándor: Eine Auswahl von den Aufgaben der Mathematikwettbewerbe in Moskau 45
Dr. Berényi Zsuzsanna: Ist Mathematik weiblich? 51
Békefi Zsuzsa: Bemerkungen zum Artikel „Über die Aufnahmeprüfungen in Mathematik" 53
Gémes Margit: Aufruf an die Mathematiklehrer 55
IDEENECKE: *Dr. Kántor Sándorné:* Gedanken nach dem Kongreß ICME—6.. 56
AUFGABEN 61

LAJOS JÓZSEFNÉ
főmunkatárs
OPI, *Budapest*

Az általános iskolai matematikaverseny országos kipróbálásáról

Az 1987/88-as tanévvel befejeződött az általános iskolások Egyéni Pályázata. Ez a sokat vitatott versenyforma ismert értékei mellett több problémát, gondot is felvetett.

A matematika tükrében vizsgálva ezt a versenyformát nem tagadható, hogy a versenyző tanulókat rákényszerítette a jó megoldások keresésére — hiszen idő volt bőven —, majd a megoldás világos, érthető, áttekinthető leírására, a pontos fogalmazásra. Ezek hiányában ugyanis nem volt „versenyképes" a dolgozat. Az évek múlása csiszoltabbá tette a megfogalmazásokat, egyre tetszetősebbé a külalakot, és mintha csökkentek volna a helyesírási hibák is. (Egy matematikadolgozat is sokat „árulkodhat" tulajdonosa anyanyelvi ismereteiről!)

Nem volt könnyű dolga az Országos Bizottságnak a feladatok kitűzése során, hiszen egy nehezedő feladatsort kellett összeállítani, amely három évfolyamnak is szólhat. Szerettük volna, ha a feladatok sikerélményhez juttatják az esetleg először bekapcsolódó, a matematika iránt éppen érdeklődni kezdő 6. osztályost, ugyanakkor tegyék próbára azoknak a 8. osztályos tanulóknak a tudását is, akik az előző évben a legjobbak voltak a versenyeken.

Mindemellett legyen kicsit kutatási jellegük is, tegyék szükségessé, hogy a tanuló feladatgyűjteményeket, szakkönyveket böngésszen, valamint legyen a feladatok között olyan is, amely személyi számítógép felhasználását, programkészítést is sugall. Több, kevesebb sikerrel, de igyekeztünk teljesíteni a feltételeket!

A gyakorlótanárok és a szaktanácsadók, de még a diákok és szülők körében is egyre többször elhangzott, hogy egyértelműbb és tisztább képet kapunk egy tanuló matematikai gondolkodásmódjáról, ismereteiről, tudásáról ha a kapott problémát, feladatot azonnal és teljesen önállóan oldja meg.

Sokan úgy gondolták, hogy az egyéni pályázat által biztosított kb. két hónapos gondolkodási idő a szülői, tanári okos segítségen, útmutatáson túl, jószándékú részmegoldások, vagy megoldások átadását, cseréjét is lehetővé tette. (Ezt látszott igazolni egyes területekről beérkező azonos típusú gondolkodásmódot mutató, vagy éppen ugyanazt a tévedést, hibát tartalmazó dolgozatok sokasága).

A gyakorlat által körvonalazott igények éppen összecsengeni látszottak a Bolyai János Matematikai Társulat évek óta dédelgetett tervével. (Ezt a tervet, elképzelést szóban már több éve, de írásos formában 1987 márciusában a vezetőszaktanácsadók rendelkezésére bocsátottuk — véleményezés céljából — és velük megbeszéltük.)

A versenyterv új jellemzői közül hármat emelek ki:

1. *A Bolyai János Matematikai Társulat védnöksége,* „égisze" *alatt működő* középiskolás (Arany Dániel, OKTV) és felsőfokú (Kürschák, Schweitzer) matematikai *versenyrendszerbe jó lenne beépíteni az általános iskolások egyfajta versenyét is.* Így több éven át figyelemmel kísérhető az élmezőnyben szereplő tanulók fejlődése, és fejlesztésük, gondo-

zásuk a legjobb szakemberekre, pedagógusokra bízható. Ez a versenyforma a tehetségkiválasztás egyik lehetősége mellett a tehetséggondozásra is nagy figyelmet fordít.

2. *A verseny legkésőbb január elején záródik* az országos döntővel, *hogy a 8. osztályos tanulók osztályfőnöki jellemzése tartalmazhassa a szép eredményeket,* elismeréseket.

3. A verseny biztosítja a legelső iskolai (házi) fordulóktól az utolsó (országos) döntőig mindenki számára ugyanazt az akadályt, azaz, ugyanazt a feladatsort, és az azonos értékeléshez segítséget nyújtó javítókulcsokat is.

Így minden versenyző egyforma mércével mérettetik meg, lakjon akár az országhatáron, vagy akár az ország szívében.

A továbbjutás feltétele mindig a teljesítmény!

A verseny koncepciója általában tetszést aratott a munkaközösségi megbeszélésektől a Művelődési Minisztériumig. Ezért a minisztérium engedélyt adott (Művelődési K. 9. sz. 1988.) arra, hogy a verseny országos kipróbálásra kerüljön az 1988/89-es tanévben a Bolyai János Matematikai Társulat és az OPI gondozásában.

Ezután már csak az anyagi (nyomdai, postai költségek), szervezési problémák megoldására, valamint a javításhoz szükséges munkafeltételek előteremtésére volt szükség.

Köszönettel tartozunk a MIGÉRT és a MÜSZI vezetőinek, mert nyomdai és postázási költségeink nagy részét megtérítették, ezzel biztosították a verseny indulásához a legalapvetőbb feltételeket!

A verseny szervezésében részt vevő pedagógusok és szaktanácsadók többsége, valamint az Országos Versenybizottság minden tagja az összes versennyel kapcsolatos teendőt társadalmi munkában végezte. Minden kollégának ezúton is köszönöm a lelkiismeretes és pontos munkát!

Az országos kipróbálás ütemezése és megvalósítása az alábbi módon történt:

I. Az első (iskolai) forduló versenydolgozatát a 6. és 7. osztályos tanulók számára az iskolákhoz postázott, titkosított feladatsorok alapján 1988. május 16-án 15 órakor országosan egyszerre, egy időben írták. Minden általános iskola igazgatója a versenyt megelőző héten meg kellett, hogy kapja az egyoldalas tájékoztatót, a 6. és 7. osztályosoknak szóló versenyfeladatsorokat, és ezek javításához szükséges útmutatókat.

Természetesen — ahogy a Művelődési Közlöny is tájékoztatott — a versenyben való részvétel mind az iskolák, mind a tanulók számára önkéntes volt.

A versenydolgozatokat a javítókulcs és pontozási útmutató segítségével az iskolai munkaközösség vagy a szaktanár javíthatta helyi megegyezés szerint.

A legalább 40%-os teljesítményt nyújtó tanulók versenydolgozatát az iskola továbbította a megyei matematika-vezetőszaktanácsadókhoz, akik a maguk által szervezett és vezetett megyei bizottságok segítségével újra átnézték a dolgozatokat, és döntöttek arról, hogy kiket hívnak be a következő (megyei szintű) fordulóra. (Pl.: A budapesti bizottság megemelte a ponthatárt, és a legalább 50%-os teljesítményt nyújtókat hívta be a fővárosi döntőbe.)

II. A megyei szintű versenydolgozatok megírására 1988. november 3-án került sor az ország 164 helyszínén. (Mivel a tanulók és kísérők útiköltségét központilag biztosítani nem tudtuk, igyekeztünk olyan szervezési formákat kitalálni és gyakorolni, amelyek a legkisebb költségkihatást jelentik. Ez természetesen a versenyben aktívan részt vevő szaktanácsadóknak és pedagógusoknak jóval több szervezési, postázási munkát jelentett.)

A megyei bizottságok a versenydolgozatokat központi javítókulcs alapján pontozták, értékelték és a legalább 50%-os teljesítményű dolgozatokat az

Országos Versenybizottsághoz továbbították.

Közel 1200 — immár 7. és 8. osztályos — tanuló dolgozata érkezett be.

Ezeket a dolgozatokat a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem 4. és 5. éves matematikatanár-szakos hallgatói dr. Sümegi László és felesége, valamint Lajos Józsefné közreműködésével átvizsgálták, és az esetleges tévedéseket kiszűrve a pontszámot akár pozitív, akár negatív irányban módosították. Így fordult elő, hogy a megyei bizottságok által adott pontszám — igen ritka esetben! — módosult. Az így keletkezett versenylista legjobb teljesítményt nyújtó 7. és 8. osztályos tanulói közül 110—110 tanulót meghívtunk az 1989. január 10-én rendezett többnyire megyeszékhelyekre szervezett országos döntőre.

Az országos döntő versenydolgozatait a vezetőszaktanácsadók azonnal postázták az Országos Versenybizottság számára, így január 17-én este már készen állt a versenylista, amelyen pontszám és helyezés szerint szerepeltek a tanulók.

Ezt a listát ezután postáztuk a megyék vezető szaktanácsadóihoz, hogy mielőbb tájékoztathassák a tanulókat eredményeikről. A legjobb teljesítmény nyújtó tanulóknak az Országos Versenybizottság is gratuláló levelet küldött, és intézkedik arról, hogy a Művelődési Közlöny nevüket, iskolájukat és tanáruk nevét közzétegye.

Örülnék, ha a versenyzőink nevével a februárban induló Arany Dániel versenyen és majd később az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyeken is találkoznánk!

Hogy az országos kipróbálás éve alatt a 6. osztályosok se legyenek szegényebbek egy versennyel, számukra megyei szintig felmenő háromfordulós versenyt rendeztünk. Az első (iskolai) forduló október 28-án volt, a második (körzeti, kerületi) forduló január 10-én volt, és a harmadik (megyei) forduló március 3-án lesz. Akik bekapcsolódtak ebbe a versenybe, azoknak minden esetben biztosítottuk a központi feladatsorokat és javítókulcsokat.

Néhány szó a feladatokról. A versenybizottság minden alkalommal igyekezett igényes, mind az ismeretek birtoklását, alkalmazását, mind kreativitást, ötletességet is igénylő feladatokat adni.

Előfordultak olyan feladatok, amelyek újfajta megközelítést, esetleg szokatlan, kevésbé ismert megoldást igényeltek. Hogy ezek milyen problémát jelentettek, és egyáltalán maga a verseny az összes szakmai, szervezési, javítási, értékelési módjával milyen sikert és gondot jelentett a gyakorlatban, erre vonatkozóan diákoktól, szülőktől, tanároktól és vezetőktől már vannak visszajelzéseink.

A verseny alapos, részletekbe menő megvitatása után — ez márciusban lesz a vezetőszaktanácsadók, az MM, az OPI és a Bolyai János Matematikai Társulat részvételével — kerül sor a döntésre, amely a „hogyan tovább?"-ra adja meg a választ! Sok a nyitott kérdés. Kell-e minden fordulóra központi feladatsor? Jó-e, ha befejeződik januárban a verseny? (Megjegyzem: április végén, május elején elölről indul a verseny, és tiszta lappal kezdhet a 6. és 7. osztályos tanuló, a 8. osztályos pedig bekapcsolódhat a februárban induló Arany Dániel matematikaversenybe.)

Elég-e a három forduló, vagy legyen négy? Növekedjen-e a versenydolgozat megírásának ideje az évek számával? (Pl.: egy 6. osztályos tanuló 90 percig, de egy 8. osztályos tanuló 150—180 percig dolgozhasson a megfelelő színvonalú feladatokon.) A legalapvetőbb kérdés: Lesz-e pénz a versenyre? Hiszen sem az OPI, sem a Bolyai Társulat nem tudja anyagiak nélkül szervezni, vezetni ezt a versenyt!

Nagyon bízom abban, hogy sikerül olyan versenyformát kialakítani, amely a diákokat és a kollégákat is lelkesíteni, az eredményes munkát pedig értékelni, jutalmazni tudja. Mégegyszer őszintén köszönöm mindenkinek, aki segített az országos kipróbálás lebonyolításában!

DR. KÁNTOR SÁNDORNÉ
adjunktus KLTE
Debrecen

Matematikai versenytesztekről I.

10 évvel ezelőtt jelentek meg az első cikkek az AHSME-ről, azaz az amerikai Évenkénti Középiskolai Matematikai Versenyvizsgáról. Néhány évig (1979—1982) magyar középiskolások is részt vettek rajta levelező úton. Tanulóink és tanáraink megismerkedtek ezzel a 30 feladatból álló, 90 perces időtartamú feleletválasztós tesztlapos versennyel, amely jelentősen különbözik az általunk megszokott hagyományos matematikai tanulmányi versenytől. Nyilvánvaló, hogy az ilyen típusú versenynek is a tehetségkutatás a célja, de úgy, hogy közben nagy tömegeket mozgat meg és lehetőséget ad az egyes középiskolák matematikaoktatásának az értékelésére, illetve összehasonlítására. Fontos szempont az is, hogy könnyen, gyorsan és objektíven lehet a dolgozatokat kijavítani. A tesztlap kitöltése gyors, figyelmes és pontos munkát igényel a tanuló részéről, tudást, kreativitást és versenyzői adottságokat mér. A tanulók teljesítményét pontozással mérik. A pontozási rendszer többször változott, ennek oka a helytelen válaszok értékelésének a módosulása. Jelenleg a következő a pontozási szabály: minden helyes válasz 5 pontot, minden helytelen válasz 0 pontot, a megválaszolatlan kérdés 2 pontot ér. Ennek a változatnak az a célja, hogy figyelmeztesse a versenyzőt arra, hogy a helytelen tippeléssel rosszul jár, ha nem biztos a válaszában, akkor inkább semmit se írjon be. A 0—150 pontos lehetséges határokat ez a számításmód nem változtatta meg. A 100 pont feletti teljesítményt kiválónak tekintik. A legalább 100 pontot elérő versenyzőket hívják meg a verseny 2. fordulójába az AIME-re, vagyis az Évenkénti Meghívásos Matematikai Versenyvizsgára. Közülük kerülnek ki az országos verseny résztvevői. Az AIME is tesztjellegű, de ott 15 feladatot tűznek ki és 3 óra a megoldási idő. Az értékelés is más, mert csak a helyes válaszokat pontozzák.

Az AHSME rendszeréhez hasonlóan bonyolítják le a középiskolások matematikai versenyét Ausztráliában is. Az ICME—5 kongresszus alatt megjelent egy, az ausztrál középiskolai matematikaversenyt bemutató könyvecske. Itt is 30 feladatot tűztek ki megoldásra, de a megoldási idő 75 perc volt. A feladatcsoportok hármas tagozódása tükrözi a feladatok nehézségi fokát. Míg az AHSME-n minden feladatra azonos pontszámot kapnak a versenyzők, addig itt az 1—10. feladatok helyes megoldásáért 3-3 pont, a 11—20. feladatokra 4-4 pont, a 21—30. feladatokra 5-5 pont jár.

Az ausztrál versenyek célja:

— kiemelkedő teljesítmények elérésére ösztönözni a tanulókat,

— elősegíteni az alapvető számolási készségek széles körű elsajátítását (a versenyen nincs megengedve a zsebkalkulátorok használata),

— az évek során összegyűjteni olyan érdekes, hasznos és erőpróbát igénylő feladatokat, amelyeket a hétköznapi középiskolai tanítás továbbfejlesztésére, kiegészítésére és gazdagítására lehet felhasználni.

Mindkét verseny feladatainak témakörei megegyeznek a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia témaköreivel, ezért a hagyományos algebrai, aritmetikai, geometriai, trigonometriai és függvénytani anyag mellett feltételezik pl. a komplex számok, a kombinatorika, a gráfelmélet, a valószínűségszámítás, a logika, a halmazelmélet, a modern algebra elemeinek az ismeretét, sőt egyszerűbb függvényegyenletek megoldásainak módszereit is.

A matematikai versenyekkel és a versenyekre való felkészítés problémáival az ICME—6 kongresszus egyik szekciója is foglalkozott. Az ajánlásokból a következőket emelném ki:

— adjunk segítséget a tanároknak a tehetséges diákok kiválasztásához és a velük való foglalkozáshoz,

— széles körű és különböző formájú tanulói aktivitásra biztosítsunk lehetőséget.

Magyarország jó hagyományokkal rendelkezik a matematikai versenyek és a versenyekre való felkészítés területén, viszont félő, hogy a nagyobb intenzitással fejlődő országok diákjai behozzák a hátrányt, sőt lehagynak bennünket, ezért érdemes odafigyelni a mienktől különböző, de hasznos és széles körben alkalmazható módszerekre. Ezen cél érdekében mutatnám be néhány középiskolai matematikai versenyvizsga feladatait:

1. *Ausztrál matematikai versenyvizsga* (16—18 éves középiskolai tanulók számára);
2. *Az 1986. évi AHSME feladatai;*
3. *Az 1987. évi AHSME feladatai;*
4. *Az 1988. évi AHSME feladatai.*

Ausztrál matematikai versenyvizsga

1—10. feladat egyenként 3 pont

1. Az alábbiak közül melyikkel egyenlő $5x-2(4-x)$?

(A) $7x-8$ (B) $3x-8$ (C) $7x-6$ (D) $3x-6$ (E) $4x-8$.

2. Az alábbiak közül melyikkel egyenlő

$$\frac{x-\frac{1}{y}}{y-\frac{1}{x}}?$$

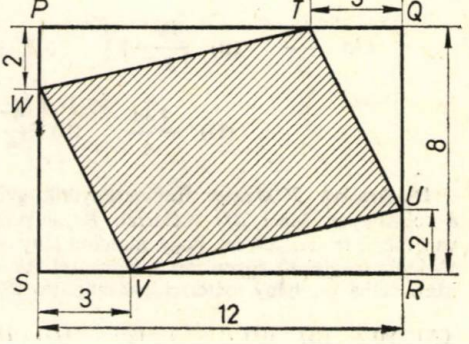
(A) $\frac{x}{y}$ (B) $\frac{y}{x}$ (C) 1 (D) -1 (E) $\frac{-x}{y}$.

3. Ha p egy 0 és 1 közé eső szám, akkor az alábbi egyenlőtlenségek közül pontosan egy helyes. Melyik az?

(A) $p > \sqrt{p}$ (B) $\frac{1}{p} > \sqrt{p}$ (C) $p > \frac{1}{p}$ (D) $p^3 > p^2$ (E) $p^3 > p$.

4. A 12 cm×8 cm méretű $PQRS$ téglalap oldalain vannak a T, U, V, W pontok, az ábrán centiméterben mutatott méreteknek megfelelően. A sávozott terület mértéke négyzetcentiméterben

(A) 36 (B) 48 (C) 42 (D) 24 (E) 60.



5. Egy egyenes az x tengelyt a $(4; 0)$ pontban metszi, és iránytangense $-\frac{3}{2}$. Egyenlete

(A) $2y-3x=6$ (B) $2y=-3x+12$

(C) $2y=3x+8$ (D) $2y=3x-12$

(E) $2y=-3x+8$.

6. Ha $(x-3)(2x+1)=0$, akkor $2x+1$ lehetséges értéke(i)

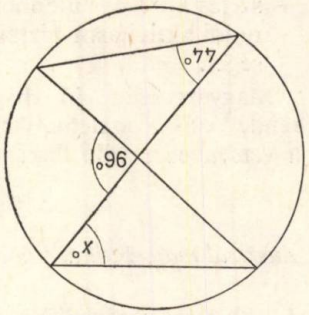
(A) csak 0 (B) 0 és 3 (C) $-\frac{1}{2}$ és 3 (D) 0 és 7 (E) $-\frac{1}{2}$ és $-\frac{7}{2}$.

7. Az alábbiak közül melyikkel egyenlő $1{,}236 \cdot 10^{15} - 5{,}23 \cdot 10^{14}$?

(A) $7{,}13 \cdot 10^{14}$ (B) 7,13 (C) 71,3 (D) $-3{,}994$ (E) $7{,}13 \cdot 10^{13}$.

8. Az ábrán mutatott körbe rajzolt húrok által alkotott szögek közül hármat megneveztünk. Az x értéke

(A) 44 (B) 48 (C) 52 (D) 84 (E) 40.



9. Ha $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, akkor z kifejezése

A) $\frac{xy}{(x-y}$ (B) $\frac{x-y}{xy}$ (C) $x-y$ (D) $\frac{xy}{y-x}$

(E) $\frac{y-x}{xy}$.

10. Ha $a+b=1$ és $a^2+b^2=2$, akkor a^4+b^4 értéke

(A) 4 (B) 8 (C) 1 (D) 3 (E) $3\frac{1}{2}$.

11—20. feladat egyenként 4 pont

11. Ha 101 egymást követő páratlan szám összege 12827, akkor a számok legkisebbike

(A) 25 (B) 27 (C) 29 (D) 31 (E) 35.

12. Egy függőleges sziklafalat vízszintesen mérve 50 m távolságról nézünk. Csúcsához 45°-kal, alapjához 30°-kal kell a vízszintes fölé emelni a szemünket. A sziklafal magassága méterben

(A) $\frac{50}{\sqrt{3}}$ (B) $\frac{50}{\sqrt{2}}$ (C) $\frac{50}{2\sqrt{3}}$ (D) $50\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (E) $50\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

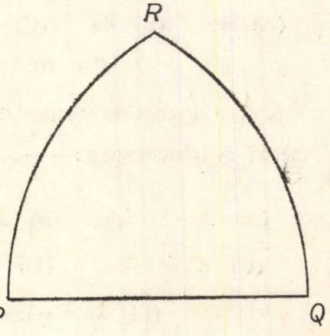
13. Legyen $x=2^{100}$, $y=3^{75}$ és $z=5^{50}$. Ha ezt a három számot a legkisebbel kezdve nagyság szerint rendezzük, akkor sorrendjük

(A) x, y, z (B) x, z, y (C) y, x, z (D) y, z, x (E) z, y, x.

14. Legyen PQ egy 2 m hosszú egyenesszakasz és PR, QR olyan körívek, hogy a PR középpontja Q, a QR ívé P. Az egyenesszakasz és a két körív által határolt síkdarab területe négyzetméterben

(A) $\frac{4\pi}{3}$ (B) $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$ (C) $\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}$

(D) $\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$ (E) $\frac{4\pi}{3}-2\sqrt{3}$.



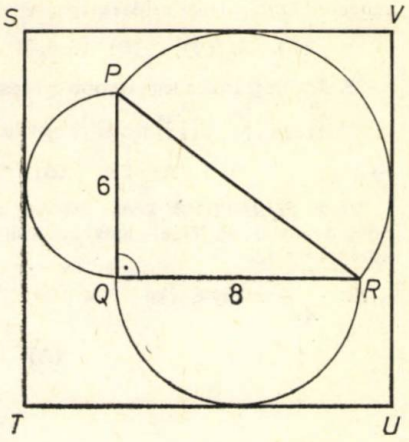
15. Amikor 2000 m-es futóversenyünk győztese átszakítja a célszalagot, Mari 200 méterrel, Bözsi pedig 290 méterrel van mögötte. Tegyük fel, hogy mindkét lány eddigi átlagsebességének megfelelő egyenletes sebességgel fut tovább. Amikor Mari célba ér, hány méterrel lesz mögötte Bözsi?

(A) 90 (B) 100 (C) 120 (D) 180 (E) 200.

16. Definíció szerint $x=\log_a y$ pontosan azt jelenti, hogy $a^x=y$. Ha $p=\frac{1}{4}$, akkor $-p\log_2 p$ értéke

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $-\frac{1}{4}$ (E) $\frac{1}{2}$.

17. A PQR háromszög Q csúcsnál levő szöge derékszög. Mindhárom oldalára mint átmérőre félkört rajzoltunk. Az $STUV$ téglalap oldalai érintik e félköröket és párhuzamosak PQ oldallal, illetve QR oldallal, mint ahogy az ábra mutatja. Ha $PQ=6$ cm és $QR=8$ cm, akkor az $STUV$ téglalap területe négyzetcentiméterben



(A) 121 (B) 132 (C) 144
(D) 156 (E) 192.

18. Ha

$$-a+b+c+d=x$$
$$a-b+c+d=y$$
$$a+b-c+d=z$$
$$a+b+c-d=w$$

és $b\neq 0$, akkor egy és csakis egy k számra érvényes az, hogy $x-y+z+w=kb$. Ez a k szám

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5.

19. Egy apa minden pénzét gyermekeire hagyta, a következő végrendelet szerint: a legidősebb kapjon 1000 forintot és a maradék tized részét, a második kapjon 2000 forintot és a maradék tized részét, a harmadik kapjon 3000 forintot és a maradék tized részét stb. Így minden gyermek ugyanannyi pénzt kapott. Hány gyermeke volt?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10.

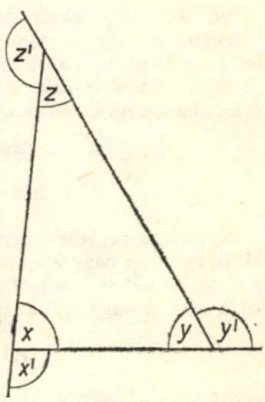
20. A $0°\leqq\Theta\leqq 360°$ határok között a $(2\sin\Theta-1)\left(\sin 2\Theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$ egyenlet különböző megoldásainak a száma

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6.

21—30. feladat: egyenként 5 pont

21. Ha egy háromszögben az (x', y', z') külső szögek aránya 4:5:6, akkor az (x, y, z) belső szögek aránya

(A) 7:5:3 (B) 3:2:1
(C) 4:2:1 (D) 8:5:2
(E) 6:5:4.



22. Koordinátasíkunk $|x|+|y|+|x+y|\leqq 2$ által definiált tartományának a területe

(A) 2,5 (B) 3 (C) 2 (D) 4 (E) 3,5.

23. Canberra a déli félteke 35°19′-es szélességi körén van. Amikor a Dél Keresztje nevű csillagkép a legmagasabb helyzetben van, legalacsonyabb csillaga Canberrából a déli horizont felett

62°20′-es szögben látható. Az a legészakibb szélesség, amelyből a Dél Keresztje még teljes egészében látható,

(A) 0° (B) déli 27°01′ (C) északi 27°01′ (D) északi 7°39′ (E) déli 7°39′.

24. Rövidítést definiálunk olyan számok leírására, amelyeknek sok szomszédos számjegye megegyezik: jelölje d_n a d számjegy n-szeres fellépését. Például 11119999988333333 helyett írjuk röviden csak azt, hogy $1_4 9_5 8_2 3_6$. Ha ebben a jelölésben $2_x 3_y 5_z + 3_z 5_x 2_y = 5_3 7_2 8_3 5_1 7_3$, akkor az (x, y, z) rendezett számhármas szükségképpen

(A) (4, 5, 3) (B) (3, 6, 3) (C) (3, 5, 4) (D) (5, 3, 4) (E) (5, 4, 3).

25. Jelölje $[x]$ azt a legnagyobb egész számot, amely x-nél nem nagyobb. Például $[3]=3$, $[5, 7]=5$. Ha $[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+[\sqrt[3]{3}]+\ldots+[\sqrt[3]{n}]=2n$, akkor n értéke

(A) 29 (B) 33 (C) 41 (D) 49 (E) 53.

26. A $PQRSTUVW$ kocka csúcsait az ábrán mutatott módon betűztük meg. Legyen X az a pont, amelyben az UV él metszi azt a síkot, amely átmegy a P csúcson és a $TUVW$ és $UQRV$ lapok középpontjain.

Az $\dfrac{UX}{XV}$ arány értéke

(A) 2 (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) 3

(D) $\dfrac{5}{4}$ (E) $\dfrac{5}{2}$.

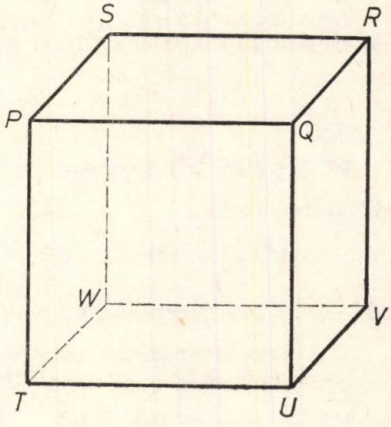
27. A $19x+83y=1983$ egyenlet egyik megoldása $(x; y)=(100; 1)$. Pontosan egy olyan másik $(x; y)$ megoldás van, amely pozitív egész számokból áll. Az abban szereplő x és y számok összege

(A) 27 (B) 37 (C) 47 (D) 57 (E) 67.

28. A PQR háromszög QR, RP, PQ oldalain rendre olyan (a csúcsoktól különböző) S, T, U pontokat választottunk, hogy QS/QR, RT/RP, PU/PQ mindegyike megegyezik az STU és PQR háromszögek területének arányával. Ez közös érték

(A) 1/3 (B) 1/2 (C) 1/4

(D) 2/3 (E) 3/4.



29. Négy pár zoknit akasztunk egymás mellé a szárítókötélre. Mindegyik zokni pontosan olyan, mint a párja, de a különböző párok különböző színűek. Hány olyan színsorozat között választhatunk, amelyekben szomszédos zoknik nem lehetnek egyszínűek?

(A) 792 (B) 630 (C) 2520

(D) 864 (E) 720.

30. Néhány egyező nagyságú kis kockát összeraktunk úgy, hogy együtt egy nagy kockát töltöttek ki, és ennek a nagy kockának néhány lapját befestettük. Miután a festék megszáradt, szétszedtük a nagy kockát és úgy találtuk, hogy a kis kockák közül pontosan 45-nek nem volt egyetlen festett lapja sem. A nagy kockának hány lapját festettük be?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5.

A megoldási kulcs:

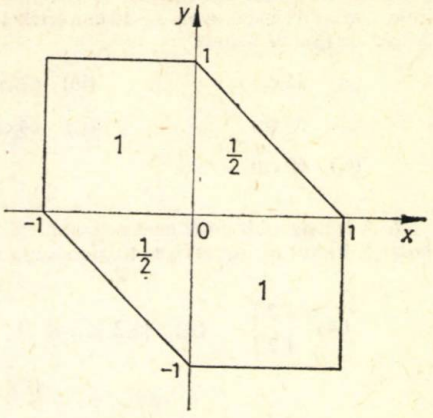
A—A—B—E—B—D—A—C—D—E—B—E—B—B—B—E—C—D—D—D—A—B—C—E—B—A—B—A—D—D.

Megjegyzések:

Ez a feladatsor aránylag nem nehéz. Problémát okozott a 23. feladat szövegének a megértése a tanulók számára.

Az *1—20. feladatok* bármelyike kitűzhető a tanítási órán és megoldásához igen rövid idő szükséges.

A 22. feladatnál nem könnyű megtalálni a koordinátasíknak az $|x|+|y|+|x+y| \leqq 2$ által meghatározott tartományát.



Nagyon szellemes megoldása van a *25. feladatnak:*

Mivel

$$[\sqrt[3]{1}] = [\sqrt[3]{2}] = \ldots = [\sqrt[3]{7}] = 1$$

és

$$[\sqrt[3]{8}] = [\sqrt[3]{9}] = \ldots = [\sqrt[3]{26}] = 2,$$

továbbá

$$[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+\ldots+[\sqrt[3]{n}] = 2$$

miatt a $[\sqrt[3]{k}]$ számok $(k=1, 2, \ldots, n)$ számtani közepe 2, ezért annyi lesz a $[\sqrt[3]{k}]$ számok közül 2-nél nagyobb, mint ahány kisebb 2-nél, azaz 7 darab. A $[\sqrt[3]{27}]>2$ miatt a feltételnek eleget tevő n értéke $26+7=33$.

2. Az 1986. évi AHSME feladatai:

1. $[x-(y-z)]-[(x-y)-z] =$

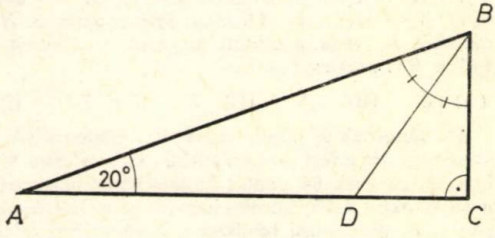
(A) $2y$ (B) $2z$ (C) $-2y$ (D) $-2z$ (E) 0.

2. Ha az xy síkbeli e egyenes meredeksége fele, és az y tengellyel alkotott metszéspontjának ordinátája pedig kétszerese az $y=\frac{2}{3}x+4$ egyenletű egyenes ugyanezen adatainak, akkor e egyenlete

(A) $y=\frac{1}{3}x+8$ (B) $y=\frac{4}{3}x+2$ (C) $y=\frac{1}{3}x+4$

(D) $y=\frac{4}{3}x+4$ (E) $y=\frac{1}{3}x+2$.

3. Az ABC háromszögben a C csúcsnál derékszög van, és az A csúcsnál levő szög 20°. Ha BD az ABC szög szögfelezője, akkor BDC szög



(A) 40° (B) 45° (C) 50°

(D) 55° (E) 60°.

4. Legyen S az alábbi állítás:

„Ha az n egész szám jegyeinek összege osztható 6-tal, akkor n osztható 6-tal."

Egy olyan n érték, ami azt mutatja, hogy S hamis:

(A) 30 (B) 33 (C) 40 (D) 42 (E) egyik sem.

5. $\left(\sqrt[6]{27}-\sqrt{6\frac{3}{4}}\right)^2$ értéke

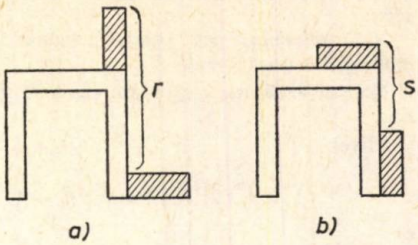
(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

6. Egy ismeretlen magasságú asztalon elhelyezünk két egybevágó fatömböt az *a)* ábra szerint. Az r hosszúságot 64 cm-nek mérjük. A fatömböket a *b)* ábra szerint átrendezve az $s=56$ cm értéket kapjuk. Milyen magas az asztal?

(A) 56 cm (D) 62 cm

(B) 58 cm (E) 64 cm.

(C) 60 cm



7. A legnagyobb x-nél nem nagyobb egésznek és a legkisebb x-nél nem kisebb egésznek az összege 5. Ekkor az összes ilyen tulajdonságú x értékek halmaza

(A) $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ (B) $\{x|2 \leqq x \leqq 3\}$ (C) $\{x|2 \leqq x < 3\}$ (D) $\{x|2 < x \leqq 3\}$

(E) $\{x|2 < x < 3\}$.

8. Az Egyesült Államok népessége 1980-ban 226 504 825 fő volt. Az ország területe 3 615 122 négyzetmérföld. Egy négyzetmérföldben $(5280)^2$ négyzetláb van. Az alábbi értékek közül melyik közelíti legjobban az egy főre eső átlagos területet négyzetlábbal mérve?

(A) 5 000 (B) 10 000 (C) 50 000 (D) 100 000 (E) 500 000.

9. Az $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$ szorzat értéke

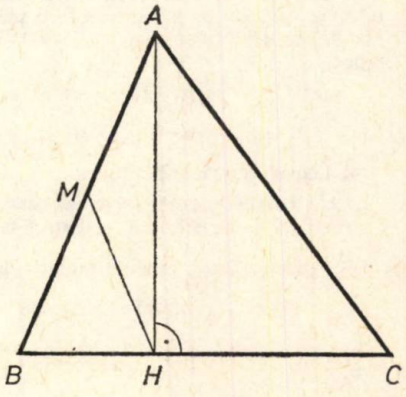
(A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{11}{20}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{7}{10}$.

10. Az ANGOL szó betűinek elkészítjük mind a 120 permutációját, és *abc*-rendbe szedve egymás után leírjuk mindegyiket. A 86. szó utolsó betűje ebben a listában

(A) A (B) N (C) G (D) O (E) L.

11. Az ABC háromszögben $AB=13$, $BC=14$ és $CA=15$; továbbá M az AB oldal felezőpontja és H az A csúcsból BC oldalra állított magasságvonal talppontja. Ekkor HM szakasz hossza

(A) 6 (B) 6,5 (C) 7 (D) 7,5 (E) 8.



12. Jánosnak 93 pontja van az idei matematikai tesztversenyen. Ha a régi pontszámítási rendszer lenne érvényben, akkor csak 84 pontot kapott volna ugyanazokért a válaszokért. Hány kérdést hagyott megválaszolatlanul? (Az új pontszámítási rendszer a bevezetőben található. A régi számítási rendszerben mindenki kapott 30 indulópontot, 4 pontot minden egyes helyes válaszért, és minden hibás válaszért levontak 1 pontot. A megválaszolatlan kérdésekre nem adtak pontot.)

(A) 6 (B) 9 (C) 11 (D) 14 (E) nem egyértelmű.

13. Az $y=ax^2+bx+c$ parabolának a (4; 2) pontban van a csúcsa. Ha a (2; 0) pont illeszkedik a parabolára, akkor abc értéke

(A) -12 (B) -6 (C) 0 (D) 6 (E) 12.

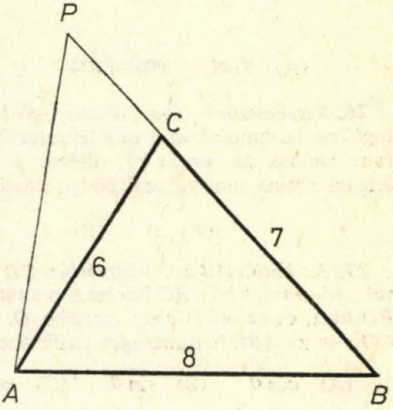
14. Tegyük fel, hogy a „hopplá", a „szökellés" és az „ugrás" a távolságmérésnek meghatározott egységei. Ha b hopplá egyenlő c szökelléssel, d ugrás egyenlő e hopplával és f ugrás egyenlő g méterrel, akkor 1 méter mennyi szökelléssel egyenlő?

(A) $\frac{bdg}{cef}$ (B) $\frac{cdf}{beg}$ (C) $\frac{cdg}{bef}$ (D) $\frac{cef}{bdg}$ (E) $\frac{ceg}{bdf}$.

15. Egy diák megkísérli kiszámítani az x, y, z számok A számtani átlagát úgy, hogy először kiszámítja x és y számtani átlagát, majd a kapott eredménynek és z-nek a számtani átlagát. Ha $x<y<z$ akkor a diák eredménye

(A) helyes
(B) mindig kisebb, mint A
(C) mindig nagyobb, mint A
(D) vagy kisebb, mint A, vagy egyenlő A-val
(E) vagy nagyobb, mint A, vagy egyenlő A-val

16. Az ABC háromszögben $AB=8$, $BC=7$, $CA=6$, és a BC oldalt meghosszabbítjuk az ábra szerint úgy, hogy a PAB háromszög hasonló legyen a PCA háromszöghöz. Ekkor PC hossza



(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11.

17. Egy sötét szobában egy fiókban 100 piros, 80 zöld, 60 kék és 40 fekete zokni van. Valaki egyesével zoknikat vesz ki a fiókból, de nem láthatja a kihúzott zoknik színét. Mennyi az a legkevesebb számú zokni, amennyit ki kell vennie a fiókból, hogy a kihúzott zoknik között biztosan legyen 10 pár? (Egy pár zokni két egyforma színű zoknit jelent, egy zoknit csak egy párban vehetünk figyelembe.)

(A) 21 (B) 23 (C) 24 (D) 30 (E) 50.

18. Egy egyenes körhengert, amelynek alapja egységsugarú kör, egy sík olyan ellipszisben metsz, amelynek nagytengelye 50%-kal nagyobb a kistengelyénél. Ekkor a nagytengely hossza

(A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{9}{4}$ (E) 3.

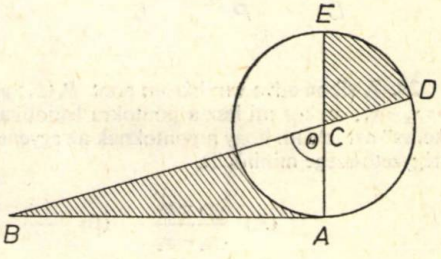
19. Egy park alapja 2 km oldalú szabályos hatszög. Aliz, kiindulva az egyik csúcsából, a park szélén egyik irányban sétálva 5 km-t tesz meg. Milyen messze van a kiinduló ponttól?

(A) $\sqrt{13}$ (B) $\sqrt{14}$ (C) $\sqrt{15}$ (D) $\sqrt{16}$ (E) $\sqrt{17}$.

20. Tegyük fel, hogy x és y egymás reciprokai és pozitívak. Ha x-et p %-kal növeljük, akkor hány százalékkal kell y-t csökkenteni, hogy továbbra is egymás reciprokai legyenek?

(A) p (B) $\frac{p}{1+p}$ (C) $\frac{100}{p}$ (D) $\frac{p}{100+p}$ (E) $\frac{100p}{100+p}$.

21. Az ábrán a BCA szög nagysága Θ radián $\left(0<\Theta<\frac{\pi}{2}\right)$; a B, C, D pontok, illetve A, C, E pontok egy egyenesbe esnek, és AB szakasz érinti a C középpontú kört A pontban.



A két satírozott terület akkor és csak akkor egyenlő, ha

(A) $\operatorname{tg}\theta=\theta$ (B) $\operatorname{tg}\theta=2\theta$ (C) $\operatorname{tg}\theta=4\theta$
(D) $\operatorname{tg}2\theta=\theta$ (E) $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\theta$.

22. Az $\{1, 2, \ldots, 10\}$ halmazból hat különböző számot választunk ki véletlenszerűen. Mi annak a valószínűsége, hogy a második legkisebb szám éppen 3?

(A) $\frac{1}{60}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) egyik sem.

23. Legyen $N=69^5+5\cdot 69^4+10\cdot 69^3+10\cdot 69^2+5\cdot 69+1$.
Hány pozitív egész osztója van N-nek?

(A) 3 (B) 5 (C) 69 (D) 125 (E) 216.

24. Legyen $p(x)=x^3+bx+c$, ahol b és c egészek. Ha $p(x)$ osztója az x^4+6x^2+25 és a $3x^4+4x^3+28x+5$ polinomoknak, akkor mennyi $p(1)$ értéke?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 8.

25. Ha $[x]$ a legnagyobb olyan egész, amely kisebb vagy egyenlő mint x, akkor

$$\sum_{N=1}^{1024} [\log_2 N] =$$

(A) 8192 (B) 8204 (C) 9218 (D) $[\log_2 (1024!)]$ (E) egyik sem.

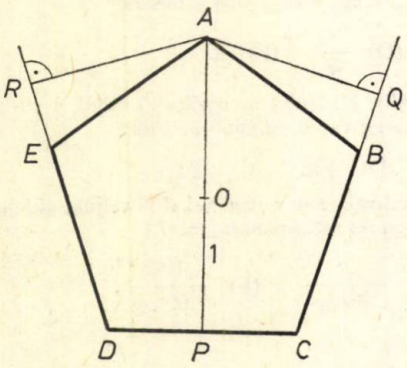
26. Szerkesszünk olyan derékszögű háromszöget az xy koordináta-rendszerben, amelynek befogói párhuzamosak az x és y tengelyekkel, és amelynél a befogók felezőpontjába futó súlyvonalak rajta vannak az $y=3x+1$, illetve $y=mx+2$ egyenletű egyeneseken. Az olyan különböző m értékek száma, amelyekre ilyen háromszög létezik

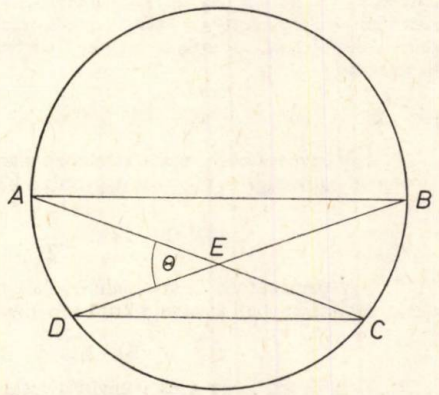
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) több mint 3.

27. Az ábrán AB a kör átmérője, CD egy AB-vel párhuzamos húr, AC húr az E pontban metszi BD húrt, és az AED szög mértéke Θ. Ekkor a CDE és az ABE háromszögek területének aránya

(A) $\cos\theta$ (B) $\sin\theta$ (C) $\cos^2\theta$

(D) $\sin^2\theta$ (E) $1-\cos\theta$.





28. $ABCDE$ egy szabályos ötszög; AP, AQ és AR pedig az A pontból a CD, CB és DE oldalak egyenesére bocsátott merőlegesek (ábra). Legyen O az ötszög középpontja. Ha $OP=1$, akkor $AO+AQ+AR=$

(A) 3 (B) $1+\sqrt{3}$ (C) 4 (D) $2+\sqrt{5}$ (E) 5.

29. A síkon adva van három pont $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, $P_3(x_3; y_3)$. Ha $x_1<x_2<x_3$ és $x_3-x_2=x_2-x_1$, akkor mi lesz a pontokra legjobban illeszkedő egyenes meredeksége? A „legjobb illeszkedés" azt jelenti, hogy a pontoknak az egyenestől az y tengellyel párhuzamosan mért távolságainak négyzetösszege minimális.

(A) $\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$ (B) $\frac{(y_2-y_1)-(y_3-y_2)}{x_3-x_1}$ (C) $\frac{2y_3-y_1-y_2}{2x_3-x_1-x_2}$

(D) $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$ (E) egyik sem.

30. Legyen $f(x)=4x-x^2$. Adott x_0-ból kiindulva úgy képezzük az (x_n) sorozatot, hogy $x_n=f(x_{n-1})$, ahol $n\in Z^+$. Hány olyan valós x_0 van, amelyre az $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sorozatban csak véges sok különböző érték fordul elő?

(A) 0 (B) 1 vagy 2 (C) 3, 4, 5 vagy 6
(D) több mint 6, de véges sok
(E) végtelen sok.

A megoldási kulcs:

B—A—D—B—A—C—E—E—C—C—B—B—E—D—C—C—B—E—A—E—B—C—E—D—B—C—C—C—B—B.

Megjegyzések:

A *11. feladatban* sok a felesleges adat. A megoldáshoz csak azt kell figyelembe venni, hogy a háromszög derékszögű és ezért

$$AM = BM = MH = \frac{1}{2}AB = 6{,}5.$$

A *18. feladat* a jó térszemlélettel rendelkezők számára nyilvánvaló, hisz az ellipszis kis tengelye nem más, mint a körhenger átmérője.

A 20. feladatnál feltűnően sok esetben az A választ gondolják helyesnek. A helyes megoldás a következő:

Jelöljük x'-vel, illetve y'-vel x, illetve y p %-kal csökkentett értékét. Ekkor

$$x' = \left(1+\frac{p}{100}\right)x \quad \text{és} \quad y' = \frac{y}{1+\frac{p}{100}} = \frac{100}{100+p}y,$$

$$100\cdot\frac{y-y'}{y} = 100\left(1-\frac{100}{100+p}\right) = \frac{100p}{100+p}.$$

A 26. feladat megoldásánál sokat segít, hogy a feladat tesztfeladat, könnyen észre lehet venni, hogy az $m=12$ vagy az $m=\frac{3}{4}$ értékek lehetnek csak jók.

RÓKA SÁNDOR
főiskolai tanársegéd
Bessenyei György Tanárképző Főiskola, Nyíregyháza

Válogatás a moszkvai matematikaversenyek feladataiból

A Szovjetunióban először 1934-ben rendeztek középiskolások számára országos versenyt matematikából. Ezt követően, 1935-től Moszkvában és Kijevben minden évben tartottak versenyt, kivéve néhány háborús évet. A moszkvai versenyek kb. 1400 eddigi feladatából következik itt rövid ízelítő.

Feladatok

1. (1945-ből) Mutasd meg, hogy bármely pozitív egész n-re teljesült az $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$ egyenlőtlenség!

2. (1950-ből) Bizonyítsd be, hogy $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$.

3. (1948-ból) Mutasd meg, hogy $\frac{1}{\log_2 \pi}+\frac{1}{\log_5 \pi}>2$.

4. (1984-ből) Igazold, hogy $\sin 1<\log_3 \sqrt{7}$.

5. (1936-ból) Mutasd meg, hogy bármely pozitív egész szám felírható három darab 2-es és néhány matematikai jel segítségével!

6. (1952-ből) Határozd meg a következő szám első 60 tizedesjegyét! $\sqrt{0{,}999\ldots99}$ (60 db 9-es)!

7. (1976-ból) Mi az első számjegye az $1^1+1^2+3^3+\ldots+999^{999}+1000^{1000}$ összegnek?

8. (1959-ből) Bizonyítsd be, hogy végtelen sok olyan természetes szám van, amely nem áll elő két köbszám összegeként!

9. (1965-ből) Igazold, hogy az n^n (n természetes szám) utolsó számjegyéből álló számsorozat periodikus!

10. (1977-ből) Legyen az (x_n) számsorozat a következő módon értelmezve: $x_1=2$, $x_2=3$, ..., $x_{n+1}=[1{,}5\cdot x_n]$. Bizonyítsd be, hogy az $y_n=(-1)^{x_n}$ sorozat nem periodikus!

11. (1980-ból) Legyen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ természetes számok növekvő sorozata. Tudjuk, hogy $a_{n+1}\leqq 10a_n$ teljesül minden n-re. Bizonyítsd be, hogy a $0, a_1, a_2, a_3 \ldots$ végtelen tizedes tört nem periodikus!

12. (1971-ből) Bizonyítsd be, hogy a $[2^k\cdot\sqrt{2}]$ számok közt végtelen sok összetett szám van!

13. (1981-ből) Adott tíz természetes szám: $a_1<a_2<a_3<\ldots<a_{10}$. Bizonyítsd be, hogy ezek legkisebb közös többszöröse nem kisebb $10a_1$-nél!

14. (1951-ből) Mutasd meg, hogy $10^{150}+5\cdot 10^{100}+1$ szám nem lehet köbszám!

15. (1969-ből) Igazold, hogy egyik 2-hatvány sem végződik négy egyenlő számjegyre!

16. (1954-ből) Ha adott 15 természetes szám, $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$, akkor ezekből előállíthatjuk a $b_1, b_2, \ldots, b_{15}$ sorozatot, ahol b_i az első sorozat azon elemeinek száma, melyek kisebbek a_i-nél, $i=1, 2, \ldots, 15$. Van-e olyan (a_k) sorozat, melyhez az alábbi (b_k) sorozat tartozik: 1, 0, 3, 6, 9, 4, 7, 2, 5, 8, 8, 5, 10, 13, 13?

17. (1965-ből) Legyen az x egy 2-nél nagyobb valós szám. Az $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^k$ számokat egyenként felírjuk cédulákra, minden cédulára pontosan egyet. A cédulák egy részét a bal, a többit a jobb zsebünkbe tesszük. Igazoljuk, hogy a bal és a jobb zsebünkben levő számok összege nem lehet egyenlő!

18. (1958-ból) Adott az alábbi egyenletrendszer:

$$*x+*y+*z=0, \qquad *x+*y+*z=0, \qquad *x+*y+*z=0.$$

Két játékos felváltva ír a csillagok helyére számokat együtthatónak. Mutassuk meg, hogy a kezdő játékos elérheti azt, hogy az egyenletrendszernek legyen nullától különböző gyöke.

19. (1935-ből) Oldd meg az egyenletrendszert!
$$\begin{cases} x+y=2, \\ xy-z^2=1. \end{cases}$$

20. (1952-ből) Oldd meg az egyenletrendszert!
$$\begin{cases} 1-x_1\cdot x_2=0, \\ 1-x_2\cdot x_3=0, \\ \vdots \\ 1-x_{n-1}\cdot x_n=0, \\ 1-x_n\cdot x_1=0. \end{cases}$$

21. (1976-ból) Oldd meg az egyenletrendszert a pozitív számok körében!
$$\begin{cases} x_1+x_2=x_3^2, \\ x_2+x_3=x_4^2, \\ x_3+x_4=x_5^2, \\ x_4+x_5=x_1^2, \\ x_5+x_1=x_2^2. \end{cases}$$

22. (1964-ből) Oldd meg az egyenletrendszert a pozitív számok körében!

$$\begin{cases} x^y = z, \\ y^z = x, \\ z^x = y. \end{cases}$$

23. (1955-ből) Oldd meg az egyenletrendszert!

$$\begin{cases} x^3+y^3 = 1, \\ x^4+y^4 = 1. \end{cases}$$

24. (1978-ból) Adott 8 valós szám: a, b, c, d, e, f, g, h. Bizonyítsd be, hogy az $ac+bd$, $ae+bf$, $ag+bh$, $ce+df$, $cg+dh$, $eg+fh$ számokból legalább az egyik nemnegatív!

25. (1954-ből) Adott 100 szám: $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$, melyek kielégítik a következő egyenlőtlenségeket:

$$\begin{cases} a_1-3a_2+2a_3 \geqq 0, \\ a_2-3a_3+2a_4 \geqq 0, \\ \quad\vdots \\ a_{99}-3a_{100}+2a_1 \geqq 0, \\ a_{100}-3a_1+2a_2 \geqq 0. \end{cases}$$

Mutasd meg, hogy ezek a számok egymással egyenlők!

26. (1969-ből) Legyen adott egy $a_1, a_2, \ldots$ valós szám sorozat, mely periodikus és periódusa 100, azaz $a_1=a_{101}$, $a_2=a_{102}$, ..., továbbá $a_1 \geqq 0$, $a_1+a_2 \leqq 0$, $a_1+a_2+a_3 \geqq 0$, és általában az $a_1+a_2+\ldots+a_n$ összeg páratlan n-re nemnegatív, páros n-re nem pozitív. Bizonyítsd, hogy $|a_{99}| \geqq |a_{100}|$!

27. (1939-ből) Oldd meg az egyenletet!

$$\sqrt{a-\sqrt{a+x}} = x.$$

28. (1950-ből) Oldd meg az egyenletet!

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$$

29. (1954-ből) Oldd meg az egyenletet!

$$x^2+2x \cdot \sin(xy)+1 = 0.$$

30. (1972-ből) Adott 17 természetes szám: $a_1, a_2, \ldots, a_{17}$. Ismert, hogy $a_1^{a_2} = a_2^{a_3} = a_3^{a_4} = \ldots = a_{16}^{a_{17}} = a_{17}^{a_1}$. Igazold, hogy ekkor $a_1=a_2=\ldots=a_{17}$!

31. (1971-ből) Az $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sorozat elemeire $n>1$ esetén igaz a $3x_n-x_{n-1}=n$ egyenlőség, valamint $|x_1|<1971$. Számold ki x_{1971} értékét 0,000 001 pontossággal!

32. (1972-ből) Oldd meg az egyenletet!

$$x^3-[x] = 3.$$

33. (1961-ből) Mutasd meg, hogy az alábbi egyenletrendszer nem oldható meg az egész számok körében!

$$\begin{cases} abcd-a = 1961, \\ abcd-b = 961, \\ abcd-c = 61, \\ abcd-d = 1. \end{cases}$$

34. (1941-ből) Oldd meg az egyenletet az egész számok körében!

$$x+y = x^2-xy+y^2.$$

35. (1948-ból) Oldd meg az egyenletet az egész számok körében!

$$x^y = y^x.$$

36. (1949-ből) Mutasd meg, hogy az $x^2+y^2+z^2=2xyz$ egyenletnek az egész számok körében nincs más megoldása, csak $x=y=z=0$!

37. (1955-ből) Oldd meg az egyenletet az egész számok körében!

$$x^3-2y^3-4z^3 = 0.$$

38. (1984-ből) Oldd meg az egyenletet az egész számok körében!

$$19x^3-84y^2 = 1984.$$

39. (1955-ből) Adott az $x^n-a_1x^{n-1}-a_2x^{n-2}-\ldots-a_{n-1}x-a_n=0$ egyenlet, ahol $a_1 \geqq 0$, $a_2 \geqq 0$, $a_3 \geqq 0$, ..., $a_n \geqq 0$. Bizonyítsd be, hogy ennek az egyenletnek nem lehet két pozitív gyöke!

40. (1952-ből) Mutasd meg, hogy tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_{31}$ konstansokra a valós számokon értelmezett

$$\cos 32x+a_{31}\cdot\cos 31x+\ldots+a_2\cdot\cos 2x+a_1\cdot\cos x$$

függvény egyaránt felvesz pozitív és negatív értékeket!

41. (1941-ből) Mutasd meg, hogy ha az

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

egész együtthatós polinom az $x=0$ és az $x=1$ helyeken páratlan értéket vesz fel, akkor az egyenletnek nincs egész gyöke!

42. (1981-ből) A valós számokon értelmezett f függvény valamely rögzített $k \neq 0$ konstansra kielégíti az $f(x+k)\cdot(1-f(x))=1+f(x)$ összefüggést minden valós x-re. Bizonyítsd be, hogy f periodikus függvény!

43. (1946-ból) Mutasd meg, hogy ha az

$$(1-x+x^2-x^3+\ldots-x^{99}+x^{100})(1+x+x^2+\ldots+x^{99}+x^{100})$$

szorzást elvégezzük, a kapott polinomban x csak páros kitevőn szerepel!

44. (1957-ből) Ismert, hogy az egész együtthatós ax^3+bx^2+cx+d polinom minden egész x-re 5-tel osztható értéket vesz fel. Mutasd meg, hogy az együtthatók mindegyike osztható 5-tel!

45. (1937-ből) A térben két kitérő egyenesen mozgatunk egy-egy adott szakaszt. Mutasd meg, hogy a szakaszok végpontjai által meghatározott tetraéder térfogata független a szakaszok helyzetétől!

46. (1945-ből) Az $ABCD$ paralelogramma AD oldalát felosztottuk n egyenlő részre. Az első osztópontot, P-t összekötjük B ponttal. A BP szakasz az AC átlót a Q pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy $\overline{AQ}=\frac{1}{n+1}\cdot\overline{AC}$!

47. (1958-ból) Egy körben adott két átmérő, AB és CD. A körön tetszőlegesen kijelölünk egy M pontot, s legyen ennek merőleges vetülete az AB, illetve CD átmérőn P, illetve Q pont. Mutasd meg, hogy a PQ szakasz hossza nem függ az M pont választásától!

48. (1947-ből) Mutasd meg, hogy egy konvex 13-szöget nem lehet feldarabolni véges sok paralelogrammára!

49. (1948-ból) Lehet-e egy alakzatnak pontosan két szimmetriaközéppontja?

50. (1983-ból) Van-e 3, 4, 9, 11 és 13 egység hosszúságú szakaszokból álló öt-oldalú érintősokszög?

Útmutatások a feladatok megoldásához

1. Írjunk mindegyik összeadandó helyett $\frac{1}{2n}$-t.

2. Használjuk fel, hogy $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{98}{99}\cdot\frac{99}{100}=\frac{1}{100}=\left(\frac{1}{10}\right)^2$, s ezt úgy kaptuk, hogy az eredeti szorzatot egy nála nagyobb számmal szoroztuk meg.

3. Figyeljük a bal oldalt: $\log_\pi 10>\log_\pi \pi^2=2$.

4. $\sin 1<\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{7}{8}<\log_3\sqrt{7}$, ez utóbbi azért, mert $3^7<7^4$.

5. $N=-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}$ (N db gyökjel).

6. Ha $0<\alpha<1$, akkor $\alpha<\sqrt{\alpha}<1$.

7. Az első négy számjegy 1000 lesz, mivel az összeg első 999 tagjának összege kisebb, mint $999+999^2+\ldots+999^{999}$, s ez nem befolyásolja 1000^{1000} első négy számjegyét.

8. Egy köbszám $9k$ vagy $9k+1$ alakú. Ebből látható, hogy például a $9k+5$ alakú számok nem állanak elő két köbszám összegeként.

9. Lássuk be, hogy n^n és $(n+20)^{n+20}$ számok utolsó számjegye megegyezik.

11. Az a_k szám jegyeinek száma ugyanannyi, mint az a_{k-1} számé, vagy 1-gyel több. Ha a tizedes tört periodikus, akkor van olyan k, hogy az a_k szám pontosan egy periódus. Azonban az ez után következő a_{k+1} szám megtöri a periodikusságot.

12. $2^n\cdot\sqrt{2}=[2^n\cdot\sqrt{2}]+\alpha$, $0<\alpha<1$. Ha $\alpha<\frac{1}{2}$, akkor $[2^{n+1}\cdot\sqrt{2}]$ páros szám. Ha $\alpha>\frac{1}{2}$, akkor $2^{n+1}\cdot\sqrt{2}=2[2^n\cdot\sqrt{2}]+2\alpha$ és most $[2^{n+1}\cdot\sqrt{2}]$ páratlan. Véve a sorozat következő elemeit, a törtrészek valamelyike előbb-utóbb ismét kisebb lesz $\frac{1}{2}$-nél, s ekkor a következő szám páros lesz.

13. Jelölje a számok legkisebb közös többszörösét A. Ekkor $A=k_1\cdot a_1=\ldots=k_{10}\cdot a_{10}$, ahol $k_1,\ldots,k_{10}$ természetes számok, és $k_1>k_2>\ldots>k_9>k_{10}$, ezért $k_1\geqq 10$, azaz $A=k_1a_1\geqq 10a_1$.

14. A megadott szám nagyobb $(10^{50})^3$-nél, kisebb $(10^{50}+1)^3$-nél.

15. Ha egy szám négy egyforma számjegyre végződik, akkor az nem osztható 16-tal.

16. Nincs ilyen sorozat.

17. A legnagyobb szám nagyobb, mint a többi összege.

18. A kezdő játékos elérheti, hogy az egyenletrendszer megoldása $(0;1;-1)$ legyen. Ehhez az szükséges, hogy mindegyik egyenletben y és z együtthatója ugyanaz a szám legyen.

19. Ha $x+y=2$, akkor $xy\leqq 1$, ezért a megoldás $(1;1;0)$.

20. $x_1=x_3=x_5=\ldots$, $x_2=x_4=x_6=\ldots$. Ha n páratlan, akkor $x_1=x_n$ és $x_1=\pm 1$, valamint $x_1=x_2=\ldots=x_n=\pm 1$. Ha n páros, akkor $x_1=x_3=\ldots=x_{n-1}=a$ és $x_2=x_4=\ldots=x_n=\frac{1}{a}$.

21. Jelölje X és Y az $x_1,\ldots,x_5$ számok közül a legnagyobbat és a legkisebbet. Az egyenletekből következik, hogy $X^2\leqq 2X$, $Y^2\geqq 2Y$. Mivel $X>0$, $Y>0$, így $2\leqq Y\leqq X\leqq 2$. Az egyenletrendszer megoldása $x_1=\ldots=x_5=2$.

22. Ha valamelyik szám nagyobb 1-nél, akkor mind a három nagyobb 1-nél. Ha a három számból pl. x a legnagyobb, akkor $x^y>z$ lenne az egyenlőség helyett. Hasonlóan tisztázható az az eset, ha valamelyik szám 1-nél kisebb. Az egyenletrendszer megoldása $x=y=z=1$.

23. A második egyenletből $|x|\leqq 1$, $|y|\leqq 1$, ezekből és az első egyenletből $0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq y\leqq 1$. Ekkor $x^4\leqq x^3$, $y^4\leqq y^3$, vagyis $1=x^4+y^4\leqq x^3+y^3=1$, amiből $x^3=x^4$ és $y^3=y^4$ következik. Az egyenletrendszer megoldásai $(1;0)$ és $(0;1)$.

24. Tekintsük a $\mathbf{v}_1=(a;b)$, $\mathbf{v}_2=(c;d)$, $\mathbf{v}_3=(e;f)$, $\mathbf{v}_4=(g;h)$ vektorokat. A feladatban ezek skalárszorzatai vannak. A négy vektor közt mindig van kettő, melyek 90°-nál nem nagyobb szöget zárnak be, s ezek skalárszorzata nem negatív.

25. Az egyenlőtlenségekből következik, hogy $a_1-a_2\geqq 2(a_2-a_3)$, $a_2-a_3\geqq 2(a_3-a_4)$, …, $a_{100}-a_1\geqq 2(a_1-a_2)$. Innen látható, hogy $a_1-a_2=a_2-a_3=\ldots=0$.

26. Megmutatjuk, hogy a sorozatnak csak akkor lehet végtelen sok eleme, ha $a_1+a_2+\ldots+a_{100}=0$. Tegyük fel, hogy $a_1+\ldots+a_{100}=-\varepsilon<0$ és $N\varepsilon>a_1$ valamely N természetes számra. Ekkor $0\leqq a_1+\ldots+a_{100N+1}=a_1-N\varepsilon<0$, s ez ellentmondás. Ezért $a_{99}+a_{100}\geqq 0$ és $|a_{100}|=-a_{100}\leqq a_{99}=|a_{99}|$.

27. Legyen $y=\sqrt{a+x}$, akkor $\sqrt{a-y}=x$. Az egyenletek négyzetének különbségéből kapjuk: $(x+y)(x-y+1)=0$.

28. A két gyökjel alatt teljes négyzet áll. $|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=1$ egyenlethez jutunk átalakítás után, a megoldás: $5\leqq x\leqq 10$.

29. Az egyenlet diszkriminánsa $D=4.\sin^2(xy)-4\geqq 0$, ahonnan $|\sin(xy)|=1$ és $x=-\sin(xy)$.

30. Tegyük fel, hogy $a_1>a_2$ (az $a_1<a_2$ eset hasonlóan tárgyalható). Az egyenletekből az alábbiak következnek:

$$a_1>a_2\Rightarrow a_2<a_3\Rightarrow a_3>a_4\Rightarrow\ldots\Rightarrow a_{16}<a_{17}\Rightarrow a_{17}>a_1\Rightarrow a_1<a_2,$$

azaz a feltevés ellentmondásra vezetett.

31. Legyen $y_k=\frac{k}{2}+\frac{1}{4}$, ekkor $3y_n-y_{n-1}=n$. Könnyű látni, hogy $|x_k-y_k|=\frac{1}{3}|x_{k-1}-y_{k-1}|$ és így elegendően nagy n-re $x_n\approx y_n$ nagy pontossággal. $x_{1971}\approx y_{1971}=985{,}250000$.

32. $x=\sqrt[3]{4}$.

33. $abcd-a=a(bcd-1)=1961$, ezért a páratlan szám. Hasonlóan a többi egyenletből kapjuk, hogy b, c, d is páratlan szám. Ez esetben azonban az egyenletnek bal oldalán páros szám áll.

34. Az egyenletből átalakítások után $(x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2=2$ egyenlethez jutunk.

35. Előbb mutassuk meg, hogy x és y ugyanannak a számnak valamely hatványa. A megoldások: $(2;4)$ és $(4;2)$.

36. A jobb oldal 2-nek magasabb hatványával osztható, mint a bal.

37. $x=y=z=0$. Tegyük fel, hogy $(x,y,z)=1$, hiszen különben az 1-nél nagyobb közös osztóval osztjuk az egyenletet. Rövid megfontolás után látszik, hogy x is, y is, z is osztható 2-vel, ellentmondásra jutottunk.

38. Az egyenletnek nincs megoldása az egész számok körében. Átalakítások után: $19(x^3-100)=84(1+y^2)$. A jobb oldal osztható 7-tel, míg a bal oldal nem.

39. Legyen x_1 és x_2 két pozitív gyök, $x_1>x_2$. Ekkor az egyenlőség bal oldalán álló kifejezést x^n-nel osztva, a nyert kifejezésbe x_1-et, illetve x_2-t helyettesítve a kapott két számból a második kisebb.

40. Jelölje f az adott függvényt. $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=0$, ebből következik az állítás.

41. Legyen $P(x_0)=0$. Ha x_0 páros, akkor $P(x_0)-P(0)$ szintén páros, ellentétben a feltevésekkel. Ha x_0 páratlan, akkor $P(x_0)-P(1)$ páros, ami ismét ellentmondás.

42. $$f(x+k)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)},\quad f(x+2k)=-\frac{1}{f(x)},\quad f(x+4k)=-\frac{1}{f(x+2k)}=f(x).$$

43. Helyettesítsünk x helyett $(-x)$-et, ugyanazt a szorzatot kapjuk, tehát a megadott függvény páros függvény.

44. Helyettesítsünk rendre $x=0$, $x=1$, $x=-1$ és $x=2$ értékeket.

45. A két szakasz nemcsak egy tetraédert, hanem egy paralelepipedont is meghatároz. Ennek állandó a térfogata, mert egyik oldallapja és a hozzátartozó magasság állandó. A tetraéder térfogata hatodrésze a paralelepipedonénak.

46. Hosszabbítsuk meg az AD és BC oldalakat, s húzzunk párhuzamosakat PB szakasszal az osztópontokon át, majd használjuk a párhuzamos szelők tételét.

47. Jelölje O a kör középpontját. Az $OPMQ$ négyszög húrnégyszög, s a köré írt kör átmérője, OM szakasz állandó hosszúságú. Ebben a körben a PQ ívhez tartozó kerületi szög állandó, ezért a PQ távolság is állandó.

48. A sokszögnek nincsenek párhuzamos oldalai.

49. Ha a két szimmetriaközéppont P és Q, akkor P pontot tükrözve Q pontra, P' pont is szimmetriaközéppont.

50. Nincs.

IRODALOM

Г. А. Гальперин, А. К. Толпыго: Московские математические олимпиады, Москва, 1986.

DR. BERÉNYI ZSUZSANNA ÁGNES
tanárnő
Budapest

Nőies-e a matematika?

A matematika oktatása, népszerűsítése régóta vet fel sok megoldásra váró kérdést. Ennek tisztázása átlépte az országhatárokat, ezért több nemzetközi szervezet alakult a matematikaoktatás kérdéseinek vizsgálata céljából.

1988. július 27-től augusztus 4-ig négyéves előkészítő munkálat után először rendezték szocialista országban a Matematika Nevelés Nemzetközi Bizottságának (ICMI: International Comission on Mathematical Instruction) soron levő, hatodik összejövetelét, az ICME—6-ot (International Congress on Mathematical Education). A magyar matematika nemzetközi rangját mutatta, hogy nagy örömünkre Budapest adott otthont a kétezernél is több, főként nyugati országokból érkezett résztvevővel, hét munkacsoportban és tizennyolc tárgyköri csoportban rendkívül élénken működő, nagysikerű rendezvénynek. A munkacsoportok aszerint különültek el, hogy milyen életkorú diákokat tanítottak a résztvevők. Az óvodai oktatástól az egyetemig és felnőttoktatásig minden csoportban értékes előadások hangoztak el és tanulságos megbeszélések folytak. A tárgyköri csoportok között már a címével is nem egy felkelti az érdeklődésünket: nyelv és matematika, matematika versenyek, a matematikai nevelés lélektana, matematika-történet, hogy csak néhányat említsünk. A Nők és a Matematikai Nevelés Nemzetközi Szervezete (IOWME: International Organisation of Women and Mathematics Education) alkotta a tizenharmadik tárgyköri csoportot.

A gondosan összeállított és megszavazott napirend a következő volt:

1. A szabályzat elfogadása.
2. Beszámoló az 1984. augusztus 8-án Adeleide-ben tartott ICME—5-ről.
3. A nemzetközi ügyvivő beszámolója az 1984—88-as évekről.
4. Az IOWME szándékai és céljai.
5. Az IOWME szervezetének felépítése, beleértve a Délafrikai Unióval való viszonyt.
6. Évenkénti találkozást rendezzenek-e?
7. Mi legyen a szervezet hivatalos nyelve?
8. A tisztségviselők szerepe és megválasztása.
9. Tisztségviselők választása 1988—92-re.
10. Egyebek.

A megbeszélések kisebb csoportokban folytak, közvetlen, baráti légkörben. A közös ügy hamarosan közel hozta egymáshoz a sokszor földrajzilag távol élő társalgókat és sokat tanultak egymástól.

Az UNESCO Tudomány, Technika és Környezeti Nevelési Osztálya ismeri, megbecsüli és elismeri az IOWME működését, ezért anyagi és erkölcsi segítséget ajánlott fel a nők matematikai nevelésével foglalkozó nemzetközi szervezetnek. Az UNESCO is bátorítani akarja az asszonyokat és lányokat arra, hogy nagyobb számban foglalkozzanak a matematikával. Erre vonatkozó több értékes kiadványt, tanulmányt is megjelentettek.

Ami az IOWME szervezeti felépítését illeti, tagjai csak egyes országok lehetnek, az egyéni tagságot nem fogadják el. A megválasztott nemzetközi összekötők gondoskodnak hazájukban az IOWME céljainak megvalósításáról és ők tartják a nemzetközi kapcsolatokat. Azokban az országokban, ahol ez szükségesnek mutatkozott, ott két nemzeti összekötőt választottak. Például Kanadában merült fel ennek szükségessége. Ott az egyik összekötő francia, a másik angol anyanyelvű. Parázs vita kerekedett a Délafrikai Unió összekötőjének megválasztása felett. Szótöbbséggel döntöttek úgy, hogy

az eddigi fehér helyett feketebőrű matematikusnő képviseli ezentúl Délafrikát, bár sokan a két összekötő kijelölését tartották helyesnek.

Az IOWME hivatalos nyelvének továbbra is az angolt választották, hiszen jelenleg világszerte általános az angol nyelv ismerete.

Magyarországon azt gondoljuk, hogy ez már nem fordulhat elő a világ egyetlen pontján sem, de kitűnt, hogy van olyan ország ma is, ahol különbséget tesznek női és férfi matematikusok megbecsülése között, „természetesen" a nők hátrányára. Elefántcsontpart küldötte beszélt róla, hogy náluk nem kelt megütközést az, hogy a nők kisebb fizetést kapnak ugyanazért a munkáért, mint a férfiak.

Beszámoltam arról, hogy nálunk ilyen hivatalos megkülönböztetés nincsen ugyan, de a matematikatanári pálya mégis elnőiesedett. Ennek nyilván nemcsak az az oka, hogy a nők jobban szeretnek tanítani a férfiaknál, hanem jelentősen befolyásolja a helyzetet a szégyenletesen alacsony tanári fizetés. A nőket a hivatástudaton kívül az is a tanári pályához köti, hogy szabadabb a munkabeosztás, mint valamilyen hivatali állásban. A szabad idejüket így a tanárnők a családjukra tudják fordítani. A férfi tanárok inkább jobban fizető munkakört vállalnak.

Sajátosan alakult a tehetségek felbukkanása. Az általános és középiskolában nagyjából még azonos a jó matematikus leányok és fiúk száma, de ez egyetemen a fiúk nagyobb számban választják a matematikus pályát, mint a leányok. Az egyetem tanárai és a matematikai kutatóintézetek tudományos munkatársai is többségükben férfiak.

Megtudtuk, hogy nemzetközi felmérést végeztek húsz országban hetvennégyezer ifjúval a fiúk és leányok matematikai tudásának, képességének összehasonlítására. A vizsgált személyeknél a fiúk geometriából jobb képességeket árultak el, mint a leányok. A térszemléletük is fejlettebb volt. A leányok algebrából voltak némileg jobbak, de általában azonos volt az eredmény algebrából, számelméletből és statisztikából. Az eredmények ellentmondanak annak az előítéletnek, mintha a fiúk matematikai képességében mutatkozó fölénye eleve, biológiailag meghatározott volna. Ezek a jelenségek túlmutatnak a tanterem korlátain. Algebrából, számelméletből és statisztikából a fiúk és a leányok nagyjából azonos eredményeket értek el a vizsgálat során. Geometriában a fiúk csak két százalékkal szárnyalták túl a leányokat. Belgiumban, Taiföldön, Finnországban és Magyarországon azonban a leányok értek el jobb eredményt a fiúknál. Franciaországban, Nigériában, Izraelben és Hollandiában a fiúk bizonyultak jobbaknak.

Egyes tudósok véleménye szerint a fiúk agyműködésében általában fejlettebb a térszemlélet. Ámde lélektani tényezők is működnek! Ezek a képességek ugyanis fejleszthetők. Nyilván sok tehetséget elfecsérelünk, mert lány létükre nem fordítunk kellő figyelmet matematikai képességeik kibontakoztatására. Bátorítanunk kell mind a fiúkat, mind a leányokat arra, hogy képességeiket a lehető legteljesebben kifejlesszék a matematikában is!

Taivanon és Japánban végzett felmérések során kitűnt, hogy az anyák mindhárom országban megcsontosodott elképzelésekkel rendelkeznek arról, hogy a leányok és fiúk teljesítménye eltérő irányú, a matematika „nem leánynak való". Ez az elgondolásuk már akkor kialakult, amikor még ilyen vonatkozású kutatásokat tudományos céllal nem folytattak sehol a világon.

Nem meglepő ezek után, hogy a felmérések vallomása szerint a matematikában elért sikereket a lányok a szerencsés külső körülményeknek, legjobb esetben is csak saját szorgalmuknak tulajdonítják, a fiúk azonban magabiztosan kitűnő matematikai adottságaikra hivatkoznak. Az önbizalom hiánya a leányo-

kat a későbbiekben gátolja az újabb eredmények elérésében!

Az IOWME számára tehát még sok az elméleti és gyakorlati tennivaló. Hazánkban elsősorban az a feladat, hogy ezeket az eredményeket közzétegyük és ezzel ráébresszük a társadalmat a lappangó súlyos kérdésekre.

Megtisztelő, hogy Magyarország az első szocialista ország, amelynek személyemben választott összekötője lett ennek a tevékeny, nemescélú világszervezetnek.

BÉKEFI ZSUZSA
gimnáziumi tanár
Veszprém

Hozzászólás „A matematika felvételi vizsgákról" című cikkhez

Dr. Ábrahám István és Csécs Miklós cikket írt A Matematika tanítása előző számában. A cikk a matematika felvételi vizsga néhány problémájáról szólt.

Ami a felvételi vizsga gondja és problémája, az a középiskolai matematikatanításnak is és a középiskolai matematikatanároknak is gondja, problémája. Elolvasva a szerzők idézett cikkét, néhány gondolatot kívánok hozzáfűzni, mert középiskolai tanárként bizonyos kérdéseket másképp látok.

A feladatmegoldások feltételrendszerének kérdései

Valóban komoly problémát rejt e kérdés teljes, tökéletes és felesleges kitérőket nem tartalmazó módszerének elsajátíttatása. Az egyenletek, egyenletrendszerek megoldása ugyanis a kiindulási halmaz azon legtágabb részhalmazának megkeresését jelenti, amelynek elemei igazzá teszik az $A=B$ vagy $A>B$ típusú állítást. A megoldáshalmaz megadásához nem szükséges minden esetben a kiindulási halmazt pontosan megadni, hiszen elég, ha a „legtágabb részhalmaz" tulajdonságot igazolom (pl. ekvivalencia-kérdésekkel, behelyettesítéssel stb.).

Más kérdés merül fel, hogyan értékeljük azt a megoldást, amely hibásan állapítja meg a kiindulási halmazt, holott erre a lépésre esetleg nem is volt szükség. (Ez a hiba esetleg nem befolyásolja a megoldáshalmaz helyes megadását.) Tanítási gyakorlatomban az ilyen megoldást nem fogadom el hibátlannak (mert nem az, függetlenül attól, hogy ezt a megoldást hibátlanná tehetjük néhány sor kihagyásával).

Az ekvivalencia-kérdések taglalását és tudatos alkalmazását nagyon fontosnak tartom. Ezen a téren valóban sok a tanulói és tanári bizonytalanság. Pedig ennek a kérdésnek a pontos végiggondolása nélkül nem bizonyítható a megoldáshalmaz „legtágabb részhalmaz" tulajdonsága sem.

Szöveg a feladatmegoldásban

A felesleges locsogást én is elítélem a feladatmegoldások során, de inkább javítok „irodalmilag kommentált" megoldásokat, mint csak matematikai formulákat tartalmazókat. Szeretem a KÖMAL és a javítási útmutató — a szerzők által elítélt — egész mondatos stílusát, mert egy megoldás nem azonos a megoldáshoz tartozó formulák együttesével. (Azt én csak csontváznak tartom.) Ha valaki a matematikát tanulta meg, és nemcsak eljárásokat, formulákat stb. utánoz, akkor akár szóbeli akár írásbeli vizsgán van, a tudását egyaránt, azonos szinten kell átadnia.

A középiskolai gyakorlatban nem kizárólag a szóbeli feleltetések alakítják a tanulók nyelvi intelligenciáját, hiszen a gondolkodás fázisai is anyanyelven történnek. Hogy helyes-e a gondolkodás,

azt a tanárnak (írásban vagy szóban) kell ellenőriznie, és minden alkalommal visszajeleznie (ez nem feltétlenül osztályzat, így a diák érezheti úgy, hogy nem felelt soha szóban). Természetesen meg kell tanulni „matematikául" beszélni és írni is — de mindez a gondolkodás kiművelésével lehet csak párhuzamos. Nagyon fontos a megtanulandó és megtanulható matematikai ismeretek pontos bevésése (definíciók, tételek stb.), hiszen gondolkodni, tovább gondolkodni szilárd ismeretek alapján lehet csak. Ezért a szerzőket csak arra tudom biztatni, hogy legyenek következetesek a pontatlanul fogalmazó, szavakat keresgető hallgatóikkal. A „következetesség" nem feltétlenül a megbuktatással kezdődik. A követelmények pontos megfogalmazása, a féléves közös munka megelőzi a vizsgát. Nem?

A megoldások formája

A szerzőknek igazuk van az áttekinthetőség követelésében. Amíg azonban a vizsgadolgozatokról nem kell „tisztázatot" készíteni, nagy előrelépés nem várható. Középiskolai gyakorlatban ajánlható több alkalommal ún. házi dolgozat készítése. Ez a műfaj nem kell hogy tartalmazza a megoldáshoz vezető utak kacskaringóit, zsákutcáit, a megértési fázist, az eltévesztett „oldalakat". Arra viszont valóban rá kell szoktatni a tanulókat, hogy megoldásaik általuk is észlelt útvesztőit pl. húzzák át, emeljék ki a jónak tartott részleteket olyan esetekben is, amikor nincs lehetőségük a tisztázat készítésére.

Igen fontos — nemcsak formai szempontból — a lényegkiemelő képességre nevelés, tanítás. Nem állítom, hogy mindenkit rá tudok nevelni. Úgy tartom, hogy a tudás magasabb szintjére jutott, aki ezzel a tulajdonsággal is rendelkezik.

A javítási útmutató megoldásairól nem tartom fontosnak, hogy az „átlag tanulóra legyenek méretezve". Átlag tanuló nincs. Esetleg van egy tanítási gyakorlat, beidegződések alapján jobban valószínűsíthető megoldás. Egyáltalán nem tartom fontosnak, hogy az útmutató ezt közölje. (A pontozási lehetőségekre jó, ha utal, s ezt általában meg is teszi.) Örülök minden olyan megoldásnak, ami nekem vagy tanítványaimnak nem jut eszébe, mert ekkor tanultam is valamit, nemcsak javítottam az érettségi dolgozatokat.

Közös-érettségi-felvételik javítási útmutatói tanári továbbképzést is pótolnak (a sajtó- és egyéb hibák ellenére is, amiből természetesen jó lenne, ha nem lenne).

A bizonyításokról szólva a gyakorlat a feladatkitűzőket igazolja. Egy bizonyítási feladat mindig nehéz, annál az egyszerű ténynél fogva, hogy az mindig produktív gondolkodást tételez fel a reproduktív gondolkodás és matematikai tevékenység helyett. A középiskolai korosztálynál — a gondolkodás absztrakciós szintje, illetve annak kialakulási és kialakítási trendje miatt az utóbbi fázis a sikeresebb. Szép lenne, ha nem így lenne. De ez az egész matematikaoktatás legnehezebb gondja. Megoldása — megoldatlansága nemcsak tanári elhatározás, illetve nemcsak tanári munka kérdése.

A nehéz feladatok pontozását lehet, de nem érdemes vitatni. Számomra és tanítványaim számára is szimpatikusabb az, ha itt is lehet részpontokat gyűjteni. Ha egy befejezhető megoldás részletét kidolgozta a vizsgázó, többet teljesített, mintha hozzá sem kezdett volna a megoldáshoz.

Szívesen olvastam volna arról a kérdésről, vajon a felvételi vizsgán megfeleltek milyen sikerrel szerepelnek a főiskolán. Van-e arra nézve adatuk a szerzőknek, hogy a jobb felvételi vizsgával jobban szerepeltek a hallgatóik a főiskolán?

A szerzők fontosnak tartják a felvételi vizsgát. Én középiskolai tanárként szeretném megérni, hogy a középiskola ne a felvételi vizsgákra, hanem a főiskolai, egyetemi tanulmányokra készítsen elő.

És szeretném, hogy akiket eljuttattam az érettségiig, az egyetemre, főiskolára konvertálható tudással érkezzen, és az egyetemi, főiskolai tanár elhiggye, hogy a konvertálható tudás kialakításáért, megszerzéséért becsülettel és felelősséggel megtettünk minden tőlünk telhetőt a középiskolában.

GÉMES MARGIT
középiskolai tanár
Budapest

Felhívás a matematikatanárokhoz

A Közoktatási Kutatások Titkársága támogatásával már 3 éve folyik kísérlet a számítástechnika matematika orientált oktatására a középiskolákban. A kísérlet keretében lehetőségünk van arra, hogy közreadjunk hasznos programokat.

A programok nagyrésze Simonovits Miklós Számítástechnika könyvéből való, egy része ahhoz kapcsolódik szorosan, ezenkívül C 64-re adunk segédprogramokat. Az említett tankönyv kapható Budapesten a Deák Ferenc utcai és az Október 6. utcai tankönyvboltban. A tankönyvhöz segédletként tanterv-vázlatokat ad a szerző A Matematika Tanítása 1987. évi 6. számában (165. o.).

A programok C 64-re és +4-re íródtak. A rajzos programok a C 64-en Simon's BASIC-et használnak. Aki szeretné megkapni őket, *felbélyegzett, megcímzett válaszborítékkal együtt küldjön egy kétoldalasra kivágott lemezt,* és írja meg, *melyik gépre kéri.*

Cím: Simonovits Miklós (MTA Matematikai Kutató Intézet), 1364 Budapest, Pf. 127.

A lemez tartalma:

Egyszerű aritmetikai programok: másodfokú egyenlet, reciprok- és négyzetösszegek, átlagszámítás.

Számelmélet: prímkeresések, tökéletes számok, Euklideszi algoritmus, kínai maradéktétel, Pell-egyenlet.

Analízis: rekurziók, Fibonacci-sorozat, modell a baktériumok szaporodására, Newton-féle gyökvonó algoritmus, a pi kiszámítása, integrálszámítás, függvényábrázolások, függvényközelítések, Taylor-polinomok kirajzolva a közelített függvénnyel együtt.

Rajzos programok: Lissajoux-görbék, töröttvonalak, TETRA (az IBM-en ismert TETRIS játék C 64-es változata), labirintus, tükörszoba, biliárdasztal visszapattanó golyóval. (Ezek C 64-en Simon's BASIC segítségével használhatók.)

Szövegkezelés: szótárprogramok (az egyik feltöltve a gimnázium angol szóanyagával), szópókerek (angol szavakkal feltöltve), titkosírás, gépírás (gépelni tanít a program), molekulasúly-számítás.

Fizika (a programok a folyamatok differencia egyenleteit használják): radioaktív bomlás, teáskanna hűlése, kúp és henger alakú vízórák, bolygómozgás, ingamozgás nagy szögekre is (ahol sin x-et nem helyettesíthetjük x-szel), a valódi és a közelítést használó ingák összehasonlítása, ferde hajítások (közegellenállással is), töltések erőtere.

Segédprogramok C 64-re: HELP, Simon's BASIC, másolóprogramok (teljes lemezre és file-okra), fordítóprogramok, és ami még időközben elkészül.

A programokhoz rövid leírást is mellékelünk, ezt Easy Script-ben a lemezre is felírjuk.

Ötletsarok

Rovatvezető: Radnainé Szendrei Julianna

DR. KÁNTOR SÁNDORNÉ DR. VARGA TÜNDE
egyetemi adjunktus
Debrecen, KLTE

Gondolatok az ICME—6 kongresszus után*

Sokszor tapasztaljuk, hogy tanítványaink nem kedvelik túlságosan a matematikai összefüggések memorizálását, illetve a feladatmegoldások pontos megfogalmazását és leírását, pedig mindkettőre szükség van.

Hogyan lehetne ezen segíteni? Talán azzal is, hogy bizonyos esetekben a szöveget rajz vagy ábra pótolná, mert az az igazság, hogy ezek is láthatóvá és érthetővé teszik gondolatainkat, a vizualizáció révén a képek jobban bevésődnek agyunkba, mint a képletek.

A grafikus módszer alkalmazását függvényvizsgálatnál, egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásánál gyakran javasoljuk (pl. Mfgy./I. k. IV. 246., 439., 1399., 1403. feladatoknál).

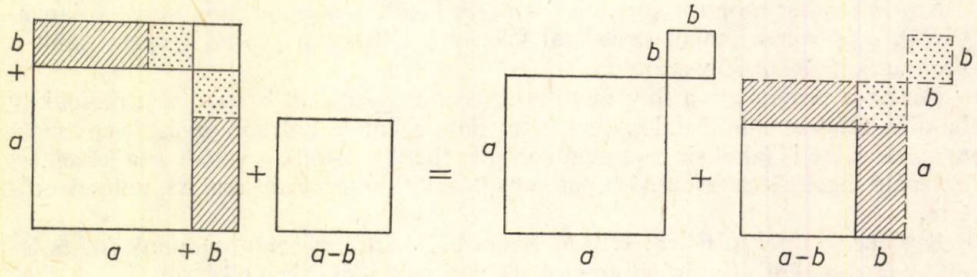
Ismert, hogy a matematika történeti fejlődése során a görög matematikusok az algebrai azonosságokat geometriai úton bizonyították és így az algebrai gondolkodást vizualizálták.

Mit csináljunk ma? *Hogyan* csinálják máshol, a világ többi részén?

Az ICME—6 kongresszuson lehetőségünk volt arra, hogy más országok tanárainak elképzeléseivel és gyakorlatával is megismerkedjünk. El kell fogadnunk azt a tényt, hogy erősíteni kell nálunk is a vizuális nevelést. Más országok (pl. Hollandia, Anglia) tankönyvei és matematikai nevelése sokkal vizuálisabb, mint a mienk. Egyrészt a tanulók többet forgatják a tankönyvet, mert annak alapján haladnak, abból tanulnak, másrészről saját maguk is több ábrát és modellt készítenek a tanítási órákon is, illetve otthon is. Az ICME—6 csoportfoglalkozásain is hasonlót tapasztaltam. Az ott látottak alapján mutatok be néhány feladatot, amelyek szerintem felhasználhatók a középiskola 1. és 2. osztályában arra, hogy a rajzzal való szemléltetéssel, ábra készítésével (lehet ez térbeli is) elősegítsék az összefüggések megjegyzését, illetve pótolják a magyarázó szöveget.

I. Algebrai azonosságok

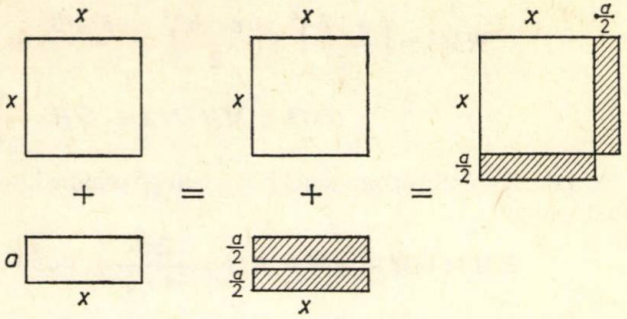
1. $(a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$ $(a > b > 0)$.



* 1988. július 27. és augusztus 3. között Budapesten került megrendezésre a 6. Nemzetközi Matematikatanítási Kongresszus (International Congress on Mathematical Education; ICME—6).

2. *Teljes négyzetté való kiegészítés*

$$x^2+ax=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$



3. *A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség*

$$a>b>0.$$

a rajz alapján:

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab,$$

és

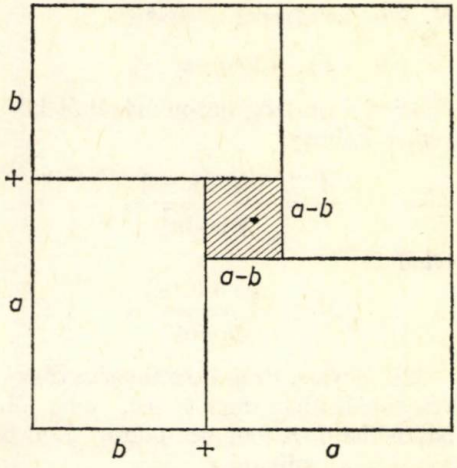
$$(a+b)^2>(a+b)^2-(a-b)^2$$

miatt

$$(a+b)^2>4ab,$$

amiből

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}.$$



4. *A harmonikus, a mértani, a számtani és a négyzetes közepek közti egyenlőtlenségek*

Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

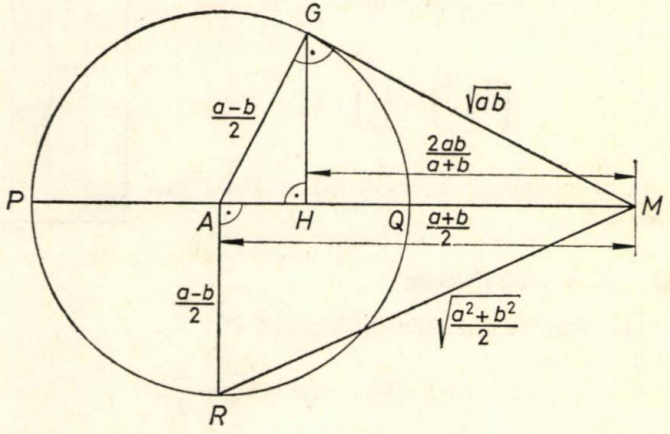
ahol $a>b>0$.

$PM=a$, $QM=b$,

$AM=\frac{a+b}{2}$,

$PQ=a-b$,

$AQ=\frac{a-b}{2}$,



$$GM^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab\Rightarrow GM=\sqrt{ab}.$$

$$RM^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2} \Rightarrow RM = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

$$GM^2 = MH \cdot MA \Rightarrow MH = \frac{2ab}{a+b}.$$

De a derékszögű háromszögekben a befogó mindig kisebb az átfogónál, ezért nyilvánvaló, hogy

$$HM < GM < AM < RM \Rightarrow \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

II. Pont és egyenes távolsága

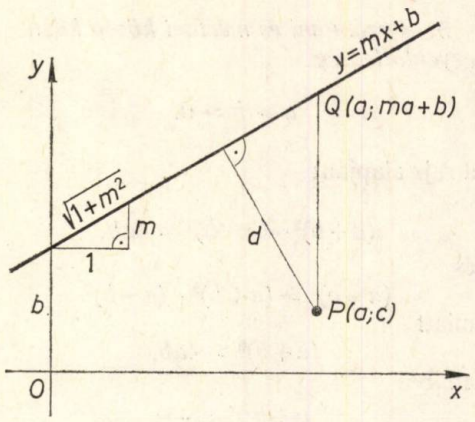
$$PQ = |ma+b-c|.$$

A két háromszög hasonlóságából következik, hogy

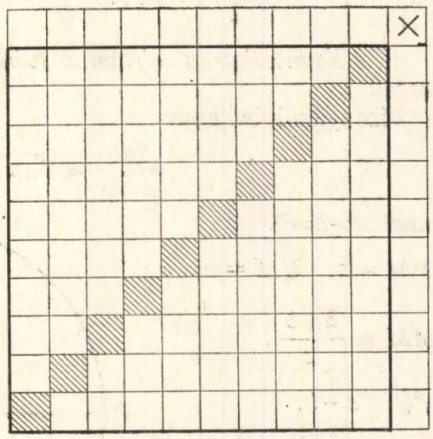
$$\frac{d}{1} = \frac{|ma+b-c|}{\sqrt{1+m^2}},$$

tehát

$$d = \frac{|ma+b-c|}{\sqrt{1+m^2}}.$$



Megjegyzés: Ez az összefüggés a függvénytáblázatban sincs benne, pedig jól használható. A fent bemutatott úton bármikor reprodukálható.

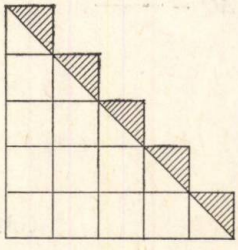


III. Kombinatorikus azonosságok

$$\binom{n}{2} = \frac{1}{2}(n^2-n) = \sum_{i=1}^{n-1} i,$$

$$\binom{n+1}{2} = \binom{n}{2} + n.$$

Az azonosságok leolvashatók a következő ábráról:



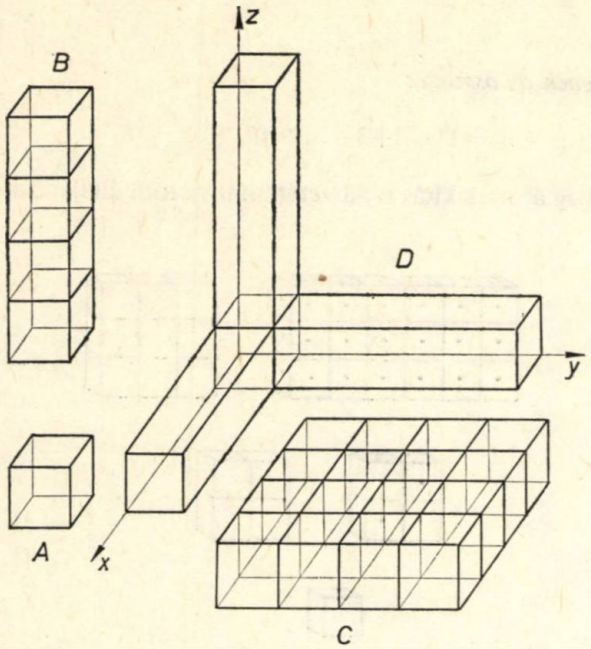
IV. Sorozatok összege

1. *Pozitív egész számok összege:*

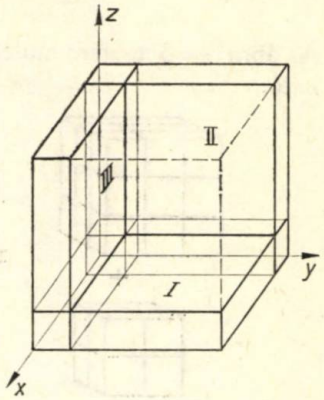
$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}.$$

2. *Az első n négyzetszám összege:*

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$



a)



b)

Az *a)* ábráról az olvasható le, hogy $1+3\cdot4+3\cdot4^2+4^3=5^3$. A *b)* ábra azt mutatja, hogy ez az összefüggés általánosítható:

$$1+3(n-1)+3(n-1)^2+(n-1)^3=n^3,$$

amiből

$$n^3-(n-1)^3=1+3(n-1)+3(n-1)^2.$$

Ha ezt az egyenlőséget $n=1, 2, \ldots, n\in N^+$ esetére rendre felírjuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
1^3 &= 1\\
2^3-1^3 &= 1+3\cdot1+3\cdot1^2\\
3^3-2^3 &= 1+3\cdot2+3\cdot2^2\\
&\vdots\\
n^3-(n-1)^3 &= 1+3\cdot(n-1)+3\cdot(n-1)^2\\
\hline
n^3 &= n+3\cdot(1+2+\ldots+n-1)+3\cdot(1^2+2^2+\ldots+n^2),
\end{aligned}$$

$$n^3 = n+3\cdot\frac{n(n-1)}{2}+3(1^2+2^2+\ldots+n^2),$$

$$\Downarrow$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

b) Másik út:

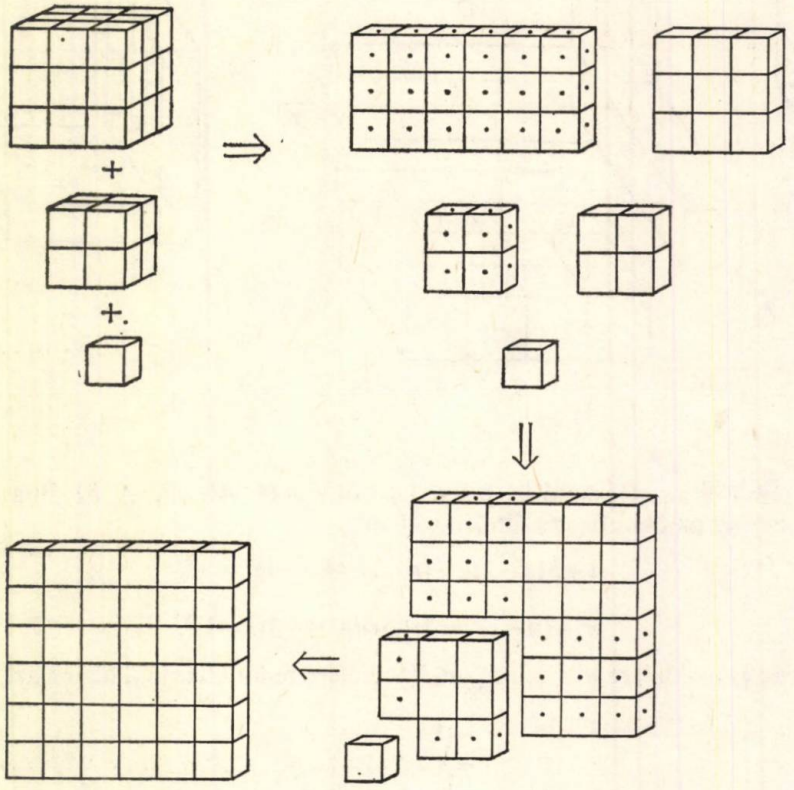
$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{3}\cdot n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

(Lásd az ábrát a borítón!)

3. *Az első n négyzetszám köbének az összege:*

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2.$$

Az ábra $n=3$ esetére mutatja meg az átalakítás módszerét, ami viszont általánosítható.



Lukács Ottó

Valószínűségszámítás gyakorlati alkalmazásokkal

A könyv a valószínűségszámítás elméleti tudnivalóit csak röviden foglalja össze. A hangsúlyt inkább a feladatokra, gyakorlati alkalmazásokra helyezi. Nagy előnye az eddigi valószínűségszámításokkal szemben, hogy személyi számítógépes és zsebszámológépes programokat is közöl az anyaghoz.

(Raktári szám: 53 086.)

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor utca 10., II.10., 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! (Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is!) A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: A lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1203. Legyen a olyan egész, amelyre a $21a+13$ és a $15a+6$ nem relatív prímek! Mekkora a legnagyobb közös osztójuk?

Újvári Jenő, Tamási

1204. Jelölje R, illetve r a háromszög köré, illetve a beírható kör sugarát, k pedig $\frac{1}{2}$-nél nem kisebb valós számot.

Igazoljuk, hogy

$$\frac{4k^2+1}{2k} \leqq \frac{kR}{r}+\frac{r}{kR}!$$

Sándor József, Farcád

1205. Igaz-e, hogy a természetes számok halmazát bárhogyan is bontjuk két (nem üres, diszjunkt) osztályra, az egyik osztálynak mindig van olyan végtelen részhalmaza, amely az összeadásra zárt?

Róka Sándor, Nyíregyháza

1206. Az O közepű egységsugarú gömbbe beírt szabályos n-oldalú H hasáb alaplapja köré írható kör sugara r. H minden l_i lapjára O-ból indított (e lapot metsző) merőleges félegyenes a gömböt az A_i pontban metszi. A H minden l_i lapja fölé emeljük az l_i alapú A_i csúcsú gúlát. E gúlák és a H egyesítése egy H^* poliédert ad. Az r mely értékeire lesz H^* konvex?

1207. Hány természetes egész megoldása van az

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{xy}=\frac{1}{1989}$$

egyenletnek?

Varga István, Békéscsaba

1208. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{16}{\mathbf{PAUL}+(\mathbf{P}+1)(\mathbf{A}+1)(\mathbf{U}+1)(\mathbf{L}+1)+1-(\mathbf{PU}+\mathbf{AL})} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{(\mathbf{P}+1)(\mathbf{A}+1)\mathbf{U}}+\frac{1}{(\mathbf{A}+1)(\mathbf{U}+1)\mathbf{L}}+\frac{1}{(\mathbf{U}+1)(\mathbf{L}+1)\mathbf{P}}+\frac{1}{(\mathbf{L}+1)(\mathbf{P}+1)\mathbf{A}},$$

ahol $\mathbf{P}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{L}$ pozitív valós számok, és az egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\mathbf{P}=\mathbf{A}=\mathbf{U}=\mathbf{L}=1$!

Erdős Pál 75. születésnapjára, tisztelettel:
Dmitrij P. Mavlo, Moszkva

Feladatmegoldások (1179—1184.)

1179. Melyik a nagyobb az

$$A = \sqrt[1988]{1988} \cdot \sqrt[1989]{1989} \quad \text{vagy} \quad B = \sqrt[1987]{1987} \cdot \sqrt[1990]{1990}?$$

Varga István, Nagyszalonta

Megoldás: Legyen $x \geqq 5$ és $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{\ln(x+2)}{x+2}$.

Az f függvény monotonitását vizsgálva az

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} - \frac{1-\ln(x+2)}{(x+2)^2} < 0$$

relációt bizonyítjuk, mert ebből az f szigorúan csökkenő voltára tekintettel: $f(n) > f(n+1)$ és így

$$\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln(n+2)}{n+2} > \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n+3)}{n+3},$$

azaz

$$\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n+3]{n+3} > \sqrt[n+1]{n+1}\,\sqrt[n+2]{n+2},$$

tehát az $n = 1987$ választásra $B > A$.

A fenti kötelezettségünknek eleget téve tekintsük a

$$g(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}, \quad x \geqq 5$$

függvényt. Mivel

$$g'(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3} > 0, \quad \text{ha} \quad x \geqq 5,$$

ezért a $g(x)$ szigorúan növekvő, vagyis

$$g(x) < g(x+2),$$

és ezt kellett igazolnunk.

Bencze Mihály, Brassó
Petkes Gergely, Nagykároly

A megoldók száma: 13.

1180. Legyen S_k a $(3k-2)^2$-nél nem nagyobb páratlan, illetve páros négyzetszámok összege aszerint, hogy k páratlan vagy páros.

Igazoljuk, hogy

$$\prod_{k=1}^{n} S_k = \frac{(3n)!}{6^n}.$$

Újvári Jenő, Tamási

Megoldás: Ismert, hogy $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, ha $n \geqq 0$, egész.

Innen:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i)^2 = 4\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right) = \frac{(2n)(2n+2)(2n+1)}{6} = \binom{2n+2}{3}.$$

Ezt felhasználva

$$\sum_{i=1}^{n} (2i+1)^2 = \sum_{i=1}^{2n+1} i^2 - \sum_{i=1}^{n} (2i)^2 =$$

$$= \frac{(2n+1)(2n+2)(4n+5)}{6} - \frac{2n(2n+1)(2n+2)}{6} = \frac{(2n+1)(2n+2)(4n+5-(2n+2))}{6} =$$

$$= \frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{6} = \binom{2n+3}{3}.$$

Tehát ha k páros, akkor $2n=3k-2$-t helyettesítve

$$S_k = \binom{3k}{3},$$

ha k páratlan, akkor $2n+1=3k-2$-t helyettesítve ugyancsak az

$$S_k = \binom{3k}{3}$$

adódik.

Ezért

$$\prod_{k=1}^{n} S_k = \prod_{k=1}^{n} \binom{3k}{3} = \prod_{k=1}^{n} \frac{3k(3k-1)(3k-2)}{6} = \frac{(3n)!}{6^n}.$$

Hornung Tamás, Zalaegerszeg
Tóth László, Szatmár

A megoldók száma: 28.

1181. Bizonyítsuk be, hogy az első n pozitív egész negyedik hatványa összegének az ötszöröse osztható az első n pozitív egész négyzetének összegével!

Bagi Gábor, Barcs

Megoldás: A *Skljarszkij—Csencov—Jaglom:* Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből I. rész Aritmetika és Algebra, Tankönyvkiadó, Bp., 1979. című könyv 134. feladatának megoldásában találjuk az

$$1^4+2^4+\ldots+n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

formulát. Ennek ötszörösét osztva az első n darab négyzetszám $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ összegével, hányadosul a

$$3n^2+3n-1$$

kifejezést nyerjük, ami n természetes volta miatt maga is ilyen. Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

Horváth Géza, Zselíz
Merényi Imre, Börvely

A megoldók száma: 35.

1182. Az ABC háromszög AD, BE, CF ($D\in BC$, $E\in AC$, $F\in AB$) szögfelezői rendre a P, Q, R pontokban metszik a háromszög köré írt kört. Igazoljuk,

$$\frac{AD}{DP}+\frac{BE}{EQ}+\frac{CF}{FR} \geqq 9.$$

Deák Imre, Székelyudvarhely

Megoldás: Legyen $BC=a$, $AC=b$ és $AB=c$. A D pontnak a körre vonatkozó hatványa

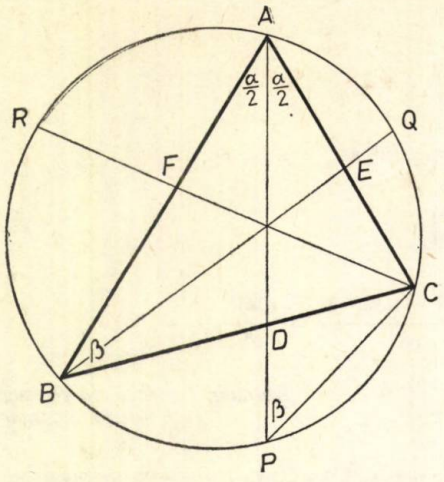
$$AD\cdot DP = BD\cdot DC, \tag{1}$$

és ebből

$$\frac{AD}{DP} = \frac{AD^2}{BD\cdot CD}.$$

Az ABD és az APC háromszögek hasonlóak *(1. ábra)*, mivel 2-2 szögük $\left(\text{az } \frac{\alpha}{2} \text{ és a } \beta\right)$ egyenlő. Így

$$\frac{c}{AD} = \frac{AD+DP}{b}.$$



Ebből és az (1) miatt

$$AD^2 = bc - BD \cdot CD.$$

A szögfelező-tétel alapján $BD = \frac{ac}{b+c}$ és $CD = \frac{ab}{b+c}$. Ezek után

$$\frac{AD}{DP} = \frac{bc - BD \cdot CD}{BD \cdot CD} =$$

$$= \frac{bc(b+c)^2}{a^2bc} - 1 = \left(\frac{b+c}{a}\right)^2 - 1.$$

Ugyanígy nyerjük, hogy

$$\frac{BE}{EQ} = \left(\frac{a+c}{b}\right)^2 - 1 \quad \text{és} \quad \frac{CF}{FR} = \left(\frac{a+b}{c}\right)^2 - 1.$$

Következésképpen

$$(2) \qquad \frac{AD}{DP} + \frac{BE}{EQ} + \frac{CF}{FR} = \left(\frac{b+c}{a}\right)^2 + \left(\frac{a+c}{b}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{c}\right)^2 - 3 = S.$$

Felhasználva egyrészt az $(x+y)^2 \geqq 4xy$ minden x, y valós számra, másrészt a számtani és mértani közepekre ismert relációt:

$$S \geqq 4\left(\frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ab}{c^2}\right) - 3 \geqq 4\left(3\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2}}\right) - 3 = 9.$$

Az egyenlőség pedig pontosan akkor áll, ha $a=b=c$, azaz ha a háromszög szabályos.

Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza
Kovács Gabriella, Nagybánya
Petkes Gergely, Nagykároly

Megjegyzések:

(1) A szögfelezők helyett súlyvonalakra is igaz az állítás: ha az ABC háromszög AD, BE és CF súlyvonalai rendre P, Q és R pontban metszik a háromszög köré írt kört, akkor $\frac{AD}{DP} + \frac{BE}{EQ} + \frac{CF}{FR} \geqq 9$ és az egyenlőség csak a szabályos háromszögre áll fenn. A bizonyítást a fentiek mintájára adhatjuk, felhasználva, hogy a háromszög oldalfelezőpontjára tükrözve a háromszöget és a súlyvonalat paralelogrammát nyerünk, amelynek oldalainak négyzetösszege az átlók négyzetösszegével egyenlő.

(2) A feladat általánosítható. Legyenek a D, E, F pontok rendre a $BC=a$, $AC=b$ és $AB=c$ oldalaknak egy pontja, melyekre $BD=\lambda a$, $AE=\lambda b$ és $AF=\lambda c$ $(0<\lambda<1)$. Jelölje P, Q, R az AD, BE, CF egyeneseknek az ABC köré írt körrel való (csúcstól különböző) metszéspontját. Ezekkel

$$\frac{AD}{DP} + \frac{BE}{EQ} + \frac{CE}{FR} \geqq 9,$$

és az egyenlőség pontosan a szabályos háromszögre teljesül. Alkalmazzuk ugyanis az ABC háromszög AD transzverzálisára a *Stewart-tételt* (lásd: *Hajós György:* Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, Bp. 1987., 319. oldal) és vegyük a D pontnak a háromszög köré írt körére vonatkozó hatványát:

$$AD^2 = \lambda b^2 + c^2(1-\lambda) - a^2\lambda(1-\lambda),$$

illetve

$$AD \cdot DP = BD \cdot DC.$$

Ezekkel

$$\frac{AD}{DP}=\frac{AD^2}{a^2\lambda(1-\lambda)}=\frac{\lambda b^2+c^2(1-\lambda)}{a^2\lambda(1-\lambda)}-1=\frac{1}{a^2}\left(\frac{b^2}{1-\lambda}+\frac{c^2}{\lambda}\right)-1.$$

Mivel $(b\sqrt{\lambda}-c\sqrt{1-\lambda})^2\geqq 0$, ezért $\dfrac{\lambda b^2+c^2(1-\lambda)}{\lambda(1-\lambda)}\geqq\dfrac{2bc}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}$.

Ezért

$$\frac{AD}{DP}\geqq\frac{2bc}{a^2\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}.$$

A számtani és mértani közepekre ismert relációból

$$\frac{1}{\sqrt{1\lambda(1-\lambda)}}\geqq\frac{2}{\lambda+1-\lambda}=2,$$

vagyis

$$\frac{AD}{DP}\geqq\frac{4bc}{a^2},$$

ebből pedig a már látott módon következik az állításunk.

Bencze Mihály, Brassó

A megoldók száma: 12.

1183. Legyen $E=e^{x+y}+e^{y+z}+e^{z+x}$. Mely valós x, y, z számokra teljesül az

$$\frac{e^x}{\sqrt{E+e^{2x}}}+\frac{e^y}{\sqrt{E+e^{2y}}}+\frac{e^z}{\sqrt{E+e^{2z}}}=\frac{3}{2}?$$

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás:

Hasonlóan $E+e^{2x}=e^xe^y+e^ye^z+e^ze^x+e^xe^x=(e^x+e^y)(e^x+e^z)$.

és

$$E+e^{2y}=(e^x+e^y)(e^y+e^z)$$

$$E+e^{2z}=(e^x+e^z)(e^y+e^z).$$

Vezessük be az $e^x+e^y=c$, $e^y+e^z=a$ és az $e^z+e^x=b$ jelöléseket. Ezekből

$$e^x=\frac{-a+b+c}{2},\quad e^y=\frac{a-b+c}{2},\quad e^z=\frac{a+b-c}{2}$$

és pozitívak. Eredeti egyenletünk a fentebbi jelölésekkel:

$$\frac{-a+b+c}{2\sqrt{bc}}+\frac{a-b+c}{2\sqrt{ac}}+\frac{a+b-c}{2\sqrt{ab}}=\frac{3}{2}. \tag{1}$$

$\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ és $\sqrt{c}$ felfoghatók, mint egy háromszög oldalai, hiszen könnyen látható, hogy bármelyik kettő összege nagyobb a harmadiknál. E háromszög szögei legyenek rendre α, β, γ. A koszinusz tétel felhasználásával (1) egyenértékű a $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\dfrac{3}{2}$ egyenlettel. Ismert (pl. *Pogáts Ferenc:* Trigonometria, Műszaki Kiadó, Bp., 1973. 326. oldal), hogy bármely háromszögben $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leqq\dfrac{3}{2}$. Itt az egyenlőség csak $\alpha=\beta=\gamma=60°$, (1) pedig $a=b=c$ esetén teljesül. Ekkor $e^x=e^y=e^z$, az exponenciális függvény monotonitása miatt $x=y=z$. Eredeti egyenletünket kielégíti tehát minden $(m;m;m)$ számhármas, ahol m tetszőleges valós szám.

Csorba Ferenc, Győr
Hornung Tamás, Zalaegerszeg

A megoldók száma: 13.

1184. Bizonyítsuk be, ha $0<b<a\in\mathbf{R}$ és $n\geqq 2$ egész, akkor

$$\frac{a-b}{a^{n+1}}<\frac{1}{n\cdot b^n}-\frac{1}{n\cdot a^n}<\frac{a-b}{b^{n+1}}$$

Dr. Marosvári Péter, Budapest

I. megoldás: Alakítsuk át a középső kifejezést!

$$\frac{1}{nb^n}-\frac{1}{na^n}=\frac{a^n-b^n}{na^nb^n}=\frac{(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1})}{na^nb^n}.$$

A jobb oldali kifejezést csökkentjük, ha számlálójának második tényezőjében a helyébe mindenütt a nála kisebb b-t írjuk, nevezőjében pedig b helyébe a-t. Így

$$\frac{1}{nb^n}-\frac{1}{na^n}>\frac{(a-b)nb^{n-1}}{na^nb^n}=\frac{a-b}{a^nb}>\frac{a-b}{a^{n+1}}.$$

Hasonlóan látjuk be a reláció jobb oldalát is:

$$\frac{1}{nb^n}-\frac{1}{na^n}=\frac{a^n-b^n}{na^nb^n}=\frac{(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1})}{na^nb^n}<$$

$$<\frac{(a-b)na^{n-1}}{na^nb^n}=\frac{a-b}{ab^n}<\frac{a-b}{b^{n+1}}.$$

Ezzel igazoltuk a feladat állítását. Megjegyezzük még, hogy az állítás $n=1$-re is teljesül.

Hárspatakiné Dékány Veronika, Budapest

II. megoldás: Alkalmazzuk a *Lagrange-féle középértéktételt* az $f(x)=\frac{1}{nx^n}$ függvényre a $[b, a]$ intervallumon. Mivel $f'(x)=\frac{1}{n}\left(-\frac{n}{x^{n+1}}\right)=-\frac{1}{x^{n+1}}$, létezik $c\in(b, a)$ úgy, hogy $\frac{1}{na^n}-\frac{1}{nb^n}=$ $=-\frac{a-b}{c^{n+1}}$, azaz $\frac{1}{nb^n}-\frac{1}{na^n}=\frac{a-b}{c^{n+1}}$, ahol $\frac{1}{a^{n+1}}<\frac{1}{c^{n+1}}<\frac{1}{b^{n+1}}$, s így épp a bizonyítandó egyenlőtlenségeket kapjuk (melyek $n=1$ esetén is érvényesek).

Merényi Imre, Börvely
Tóth László, Szatmár

A megoldók száma: 31.

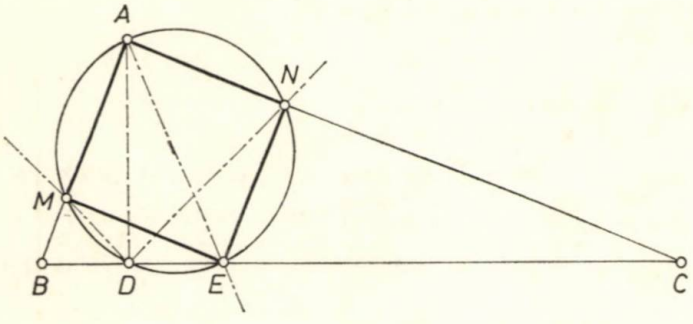
A megoldók névsora (1179—1184.)

Bagi Gábor, Barcs (1179. 2 mód, 1180., 1181. 2 mód, 1184.); Bencze Mihály, Brassó (1179. 3 mód, 1180—1182., 1183. 2 mód, 1184. 2 mód); Bigus Imre, Sárospatak (1180—1182., 1184.); Bíró Bálint, Eger (1181., 1184.); Boda Miklós, Pécs (1181.); Csepreginé Ambrus Gabriella, Budapest (1180., 1181., 1184.); Csorba Ferenc, Győr (1180., 1181., 1183., 1184.); Giczi Margit, Sümeg (1180., 1181.); Hajna János, Pécs (1179—1181., 1183., 1184.); Hárspatakiné Dékány Veronika, Budapest (1180., 1181., 1184.); Hornung Tamás, Zalaegerszeg (1179—1184.); Horváth Géza, Zselíz (1180., 1181.); Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (1179—1184.); Karsai Bálint, Nagyigmánd (1181.); Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép (1179., 1181., 1184.); Kosztolányi József, Szeged (1180., 1181., 1184.); Kovács Gabriella, Nagybánya (1179—1184.); Dr. Marosvári Péter, Budapest (1180—1182.); Matekovics Mihály, Arad (1181., 1183., 1184.); Merényi Imre, Börvely (1181., 1184.); Munkácsy István, Győr (1180., 1181., 1184.); Náfrádi Ferenc, Győr (1180., 1181., 1184.); Petkes Gergely, Szatmár (1179—1182. 2-2 mód, 1183., 1184. 2 mód); Rakonczai György, Budapest (1179—1184.); Rischákné Kishalmi Rózsa, Hódmezővásárhely (1180., 1181., 1184.); Simon József, Csíkszereda (1180—1182., 1184); Számadó László, Budapest (1180., 1184. 2 mód); Szűcs Zoltán, Budapest (1180., 1181., 1184.); Tarczi András, Hajdúszoboszló (1181., 1184.); Tóth Ferenc, Szeged (1181., 1184.); Tóth László, Szatmár (1179—1182., 1184.); Tóth Sándor, Sárospatak (1179—1181., 1183., 1184.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (1179—1181., 1182. 2 mód, 1183., 1184. 2 mód); Udvari Tibor, Baja (1180., 1181., 1184.); Varga István, Nagyszalonta (1179—1181., 1182. 2 mód, 1183. 1184. 3 mód); Zakar Zoltán, Fegyvernek (1181., 1184.); Zalán Péterné, Budapest (1181.).

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata

FZZ7



1989. XXXVI. évfolyam 3 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
URBÁN JÁNOS

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:
ÁCS PÁL, ELŐD ISTVÁNNÉ, HÓDI ENDRE, DR. KOLLER LÁSZLÓNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, LAJOS JÓZSEFNÉ, NÉMETHY KATALIN, PÁLMAY LÓRÁNT, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZENDREI JULIANNA, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1087 Budapest, Berzsenyi utca 6.
Telefon: 1141-009

89-1259 — Szegedi Nyomda
F. v.: Surányi Tibor igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 42,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 7,— Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy a közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő adatokat is:
a) személyi számukat, *b)* asszonyok leánykori nevüket, *c)* lakáscímüket — irányítószámmal, *d)* foglalkozásukat (beosztásukat), *e)* munkahelyük pontos megnevezését, (nyugdíjasok törzsszámukat), *f)* munkahelyük címét — irányítószámmal.

TARTALOM

Dr. Kántor Sándorné: Matematikai versenytesztekről II. 65
Radnainé Szendrei Julianna: Caleb Gattegno (1911—1988) 74
Urbán János: Rövid beszámoló a 6. Nemzetközi Matematikaoktatási Kongresszusról 77
Ambrus András: A matematikatanítás néhány kérdése külföldi szemmel nézve ... 81
Dr. Wolfgang Dörband: A trigonometria legismertebb tételeinek levezetése a háromszög normálisainak tételéből és a tetraéderre való általánosítás 86
KÖNYVISMERTETÉS 91
FELADATOK 92
ÚJ KÖNYVEK ..... III.

СОДЛРЖАНИЕ

др. Кантор Шандорнэ: О конкурсных тестах по математике II. 65
Раднаинэ Сендреи Юлианна: Калеб Гаттенё (1911—1988) 74
Урбан Янош: Краткая информация о 6-ом Международном конгрессе по обучению математике 77
Амбруш Андраш: Некоторые вопросы преподавания математики глазами иностранца 81
Волфганг Дёрбанд: Выведение наиболее известных теорем тригонометрии из теоремы нормали треугольника и обобщение на тетраэдр. I. 86
РЕЦЕНЗИЯ 91
ЗАДАЧИ 92
НОВЫЕ КНИГИ ..... III.

INHALTSVERZEICHNIS

Dr. Kántor Sándorné: Über die Tests im Mathematikwettbewerb II. 65
Radnainé Szendrei Julianna: Caleb Gattegno (1911—1981) 74
Urbán János: Ein kurzer Bericht vom 6. Internationalen Kongreß über Mathematikunterreicht 77
Ambrus András: Einige Fragen des Mathematikunterrichts mit den Augen eines Ausländers betrachtet 81
Wolfgang Dörband: Dia Ableitung der bekanntesten Satzen der Trigonometrie von dem Satz der Normalen des Dreieckes und die Verallgemeinerung auf Tetraeder. I. 86
BUCHREZENSION 91
AUFGABEN 92
NEUE BÜCHER ..... III.

DR. KÁNTOR SÁNDORNÉ
adjunktus KLTE
Debrecen

Matematikai versenytesztekről II.

3. Az 1987. évi AHSME feladatai:

1. $(1+x^2)(1-x^3)$ egyenlő

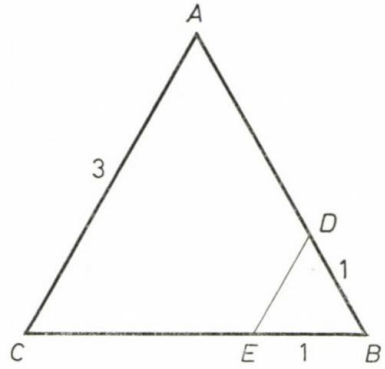
(A) $1-x^5$ (B) $1-x^6$ (C) $1+x^2-x^3$ (D) $1+x^2-x^3-x^5$

(E) $1+x^2-x^3-x^6$.

2. Egy 3 egység oldalú ABC szabályos háromszög B csúcsát levágtuk a B csúcstól 1 egység távolságra levő D és E pontokban. Az így keletkezett $ADEC$ négyszög kerülete

(A) 6 (B) $6\frac{1}{2}$ (C) 7

(D) $7\frac{1}{2}$ (E) 8.



3. Hány 100-nál kisebb (10-es számrendszerben felírt) prímszámnak 7-es az utolsó számjegye?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8.

4. $\dfrac{2^1+2^0+2^{-1}}{2^{-2}+2^{-3}+2^{-4}}$ értéke

(A) 6 (B) 8 (C) $\frac{31}{2}$ (D) 24 (E) 512.

5. Egy diák feljegyezte egy N mérésből álló mérési sorozat mért eredményeinek százalékos megoszlását. Ezt a mellékelt táblázat mutatja. Mennyi lehet az N legkisebb értéke?

mért érték	százalékos megoszlás
0	12,5
1	0
2	50
3	25
4	12,5
	100

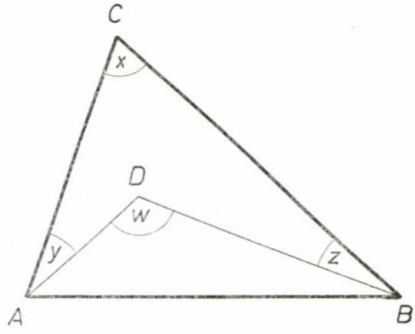
(A) 5 (B) 8 (C) 16 (D) 25 (E) 50.

6. Az alábbi ABC háromszögben D belső pont és x, y, z, w az ábrán megjelölt szögeknek a fokokban mért nagysága. Fejezzük ki x-et y, z és w segítségével.

(A) $w-y-z$ (B) $w-2y-2z$

(C) $180-w-y-z$ (D) $2w-y-z$

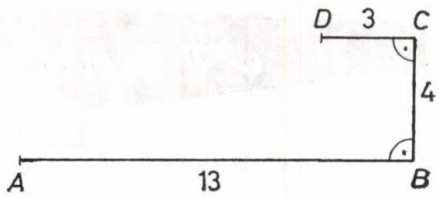
(E) $180-w+y+z$.



7. Ha $a-1=b+2=c-3=d+4$, akkor a, b, c és d közül melyik a legnagyobb?

(A) a (B) b (C) c (D) d (E) nem mindig ugyanaz a legnagyobb.

8. Az ábra szerinti AD és BD távolságok összege
(A) 10 és 11 közé esik
(B) 12
(C) 15 és 16 közé esik
(D) 16 és 17 közé esik
(E) 17



9. Egy számtani sorozat első négy tagja a, x, b, $2x$. Ekkor $\frac{a}{b}$

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) 2.

10. Hány olyan, zérustól különböző számokból álló, rendezett $(a; b; c)$ számhármas van, amelyben bármelyik szám a másik kettő szorzata?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5.

11. Legyen c egy konstans. Az

$$x-y = 2$$

$$cx+y = 3$$

egyenletrendszernek akkor és csak akkor van az első síknegyed belsejébe eső $(x; y)$ megoldása, ha

(A) $c = -1$ (B) $c > -1$ (C) $c < \frac{3}{2}$ (D) $0 < c < \frac{3}{2}$ (E) $-1 < c < \frac{3}{2}$.

12. Egy hivatalban a főnök a nap különböző időpontjaiban egy levelet tesz titkárnője asztalára, hogy legépeltesse. A levelet mindig a már az asztalon levő levelek tetejére teszi. A titkárnő, ha ideje engedi, legfelülről elvesz egy levelet és legépeli. Ha összesen öt levél van és a főnök 1—2—3—4—5 sorrendben tette őket az asztalra, akkor az alábbi sorrendek közül melyik az, amelyik szerint a titkárnő biztosan nem gépelte a leveleket.

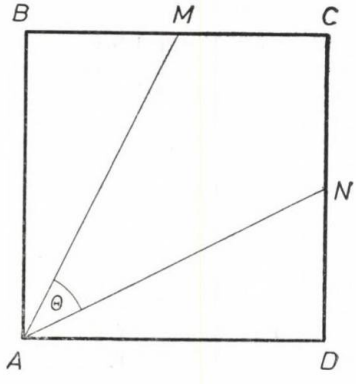
(A) 1 2 3 4 5 (B) 2 4 3 5 1 (C) 3 2 4 1 5 (D) 4 5 2 3 1

(E) 5 4 3 2 1.

13. Egy 5 cm széles, hosszú papírcsíkot egy 2 cm átmérőjű orsóra 600 menetben feltekercselünk, és így egy 10 cm átmérőjű tekercset kapunk. Becsüljük meg a papírcsík hosszát méterben. (A tekercset úgy képzeljük el, mintha 600 olyan koncentrikus körgyűrűből állna, amelyeknek a sugara 2 cm-től 10 cm-ig egyenletesen nő.)

(A) 36π (B) 45π (C) 60π (D) 72π (E) 90π.

14. Az $ABCD$ négyzet BC és CD oldalának középpontját jelölje M és N. Ekkor $\sin\theta =$



(A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{10}}{5}$

(D) $\frac{4}{5}$ (E) egyik sem.

15. Ha $(x; y)$ kielégíti az alábbi egyenletrendszert

$$xy = 6 \quad \text{és} \quad x^2y+xy^2+x+y = 63,$$

akkor x^2+y^2 értéke

(A) 13 (B) $\frac{1173}{32}$ (C) 55

(D) 69 (E) 81.

16. Egy rejtjelező a pozitív egész számok kódolására a következő módszert alkalmazza. Először a számot felírja 5-ös számrendszerben. Utána a $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ számjegyek és a $\{v; w; x; y; z\}$ betűk közt megadott kölcsönös egyértelmű leképezés segítségével átírja a számot a fenti betűkből álló szóvá. Ezt az eljárást alkalmazva, három egymást növekvő sorrendben követő egész szám kódja *vyz*, *vyx* és *vvw*. Milyen lehet ekkor *xyz* eredeti, 10-es számrendszerbeli alakja?

(A) 48 (B) 71 (C) 82 (D) 108 (E) 113.

17. Egy matematikai versenyen Bandi és Dénes együttesen elért pontszáma ugyanannyi, mint Annáé és Károlyé együttvéve. Ha Bandi és Károly pontjait megcserélnénk, akkor Anna és Károly összpontja több lenne, mint a másik kettőé. Továbbá Dénes egymaga több pontot ért el, mint Bandi és Károly együtt. Állapítsuk meg a versenyzők végső sorrendjét, csökkenő sorrendben. (Feltételezzük hogy minden pontszám nemnegatív.)

(A) Dénes, Anna, Károly, Bandi
(B) Dénes, Anna, Bandi, Károly
(C) Dénes, Károly, Bandi, Anna
(D) Anna, Dénes, Károly, Bandi
(E) Anna, Dénes, Bandi, Károly

18. Egy könyvespolc teljes kitöltéséhez A darab (egyforma vastagságú) algebrakönyv és H darab (egyforma vastagságú, de az algebrakönyvnél vastagabb) geometriakönyv szükséges. Egy másik lehetséges kitöltésben S algebrakönyv és M geometriakönyv szükséges. Ha csak algebrakönyveket használunk, akkor E példányra van szükség. Feltéve, hogy A, H, S, M, E különböző pozitív egészek, akkor E értéke:

(A) $\dfrac{AM+SH}{M+H}$, (B) $\dfrac{AM^2+SH^2}{M^2+H^2}$, (C) $\dfrac{AH-SM}{M-H}$, (D) $\dfrac{AM-SH}{M-H}$

(E) $\dfrac{AM^2-SH^2}{M^2-H^2}$.

19. Az alábbi számok közül melyik esik legközelebb $\sqrt{65}-\sqrt{63}$-hoz?

(A) 0,12 (B) 0,13 (C) 0,14 (D) 0,15 (E) 0,16.

20. Mennyi az alábbi kifejezés értéke?

$$\lg(\operatorname{tg} 1°)+\lg(\operatorname{tg} 2°)+\lg(\operatorname{tg} 3°)+\ldots+\lg(\operatorname{tg} 88°)+\lg(\operatorname{tg} 89°).$$

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}\lg\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{1}{2}\lg 2$ (D) 1 (E) egyik sem.

21. Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszögbe kétféle módon írhatunk négyzetet (*a*), *b*) ábra).

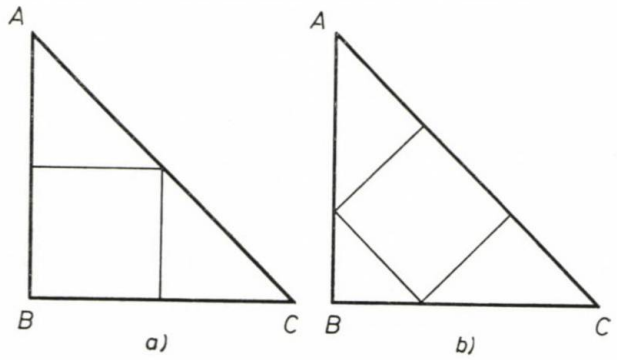
Ha az

a) ábra szerint járunk el, akkor a négyzet területe 441 cm². Mennyi lesz a *b*) ábra szerint beírt négyzetterülete cm²-ben?

(A) 378 (B) 392

(C) 400 (D) 441

(E) 484.



22. Egy labda a tavon úszott, amikor befagyott a tó. A labdát a jégből eltávolítva a jég feltörése nélkül 24 cm átmérőjű és 8 cm mély lyuk maradt vissza. Mekkora a labda centiméterekben mért sugara?

(A) 8 (B) 12 (C) 13 (D) $8\sqrt{3}$ (E) $6\sqrt{6}$.

23. Ha p prímszám, és az $x^2+px-444p=0$ egyenlet mindkét gyöke egész, akkor

(A) $1 < p \leqq 11$ (B) $11 < p \leqq 21$ (C) $21 < p \leqq 31$ (D) $31 < p \leqq 41$

(E) $41 < p \leqq 51$.

24. Hány darab legalább elsőfokú f polinom elégíti ki az

$$f(x^2) = (f(x))^2 = f(f(x))$$

összefüggést?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) véges sok, de több mint 2 (E) végtelen sok.

25. Az ABC háromszög A, illetve B csúcsának koordinátái (0; 0), illetve (36; 15). C koordinátái is egész számok. Mi az ABC háromszög területének lehetséges minimuma?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{13}{2}$ (E) nincs minimális területű háromszög.

26. 2,5-et véletlenszerűen két nemnegatív valós szám összegére bontjuk. Pl. 2,143 és 0,357, vagy $\sqrt{3}$ és $2{,}5-\sqrt{3}$. Ezután mindkét számot egészre kerekítjük. Az első példában így 2-t és 0-t kapunk, a másodikban pedig 2-t és 1-et. Mi annak a valószínűsége, hogy az így kapott két egész érték összege 3?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{5}$ (E) $\frac{3}{4}$.

27. A $C=\{(x; y; z) | 0 \leqq x, y, z \leqq 1\}$ sajtkockát a $x=y$, $y=z$ és $z=x$ síkokkal feldaraboljuk (a darabokat addig nem mozdítjuk el, míg a vágásokat el nem végeztük). Hány darab sajthoz jutunk így?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9.

28. Legyenek a, b, c és d valós számok. Tegyük fel, hogy a $z^4+az^3+bz^2+cz+d=0$ egyenlet gyökei a $0+0i$ középpontú, egységsugarú körön levő komplex számok. Ekkor a gyökök reciprokainak összege

(A) a (B) b (C) c (D) $-a$ (E) $-b$.

29. Tekintsük az alábbi rekurzióval értelmezett sorozatot

$t_1 = 1$,

$t_n = 1+t_{\frac{n}{2}}$, ha $n > 1$ és páros,

$t_n = \frac{1}{t_{n-1}}$, ha $n > 1$ és páratlan.

Ha $t_n = \frac{19}{87}$, akkor n számjegyeinek összege

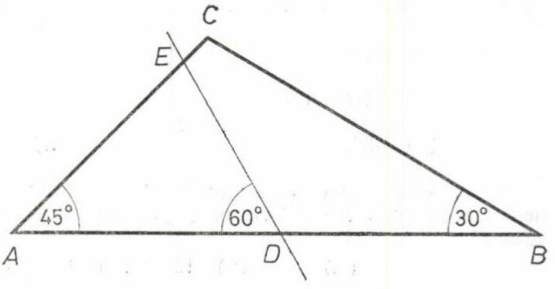
(A) 15 (B) 17 (C) 19 (D) 21 (E) 23.

30. Az ábra szerinti ABC háromszögben $BAC\sphericalangle = 45°$, $ABC\sphericalangle = 30°$. Az ED egyenes az ABC háromszöget két egyenlő területű részre vágja, $ADE\sphericalangle = 60°$ és D az AB oldalon van. (Lehet, hogy az ábra nem pontos; talán E nem AC, hanem CB oldalon van.) Ekkor az $\frac{AD}{AB}$ arány értéke

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{2}{2+\sqrt{2}}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$

(E) $\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$

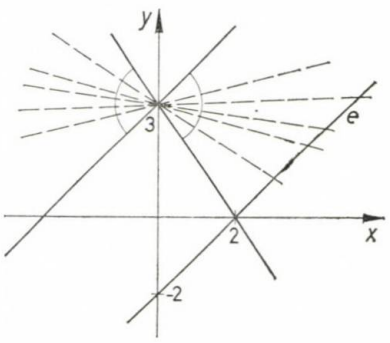


A megoldási kulcs:

D—E—C—B—B—A—C—C—B—D—E—D—A—B—D—D—E—D—B—A—B—C—D—B—C—B—B—D—A—E.

Megjegyzések:

A *11. feladatot* geometriai úton is megoldhatjuk. Ekkor a feladatot úgy fogalmazzuk át, hogy keressük meg azokat a c értékeket, amelyekre az e: $x-y=2$ és az f: $cx+y=3$ egyeneseknek a metszéspontja az I. negyedbe esik. Ábrát készítünk:



Az ábráról leolvasható, hogy a keresett egyenesek $(-c)$ meredekségére $-\frac{3}{2}<-c<1$, vagyis $-1<c<\frac{3}{2}$ teljesül.

A *19. feladat* megoldásánál sem szabad zsebszámológépet használni, ezért becslést végzünk:

$$\sqrt{65}-\sqrt{63}=\frac{(\sqrt{65}+\sqrt{63})\cdot(\sqrt{65}-\sqrt{63})}{\sqrt{65}+\sqrt{63}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{65}+\sqrt{63}}\approx\frac{1}{8}.$$

$$\text{De}\quad \sqrt{65}+\sqrt{63}>15,\quad \sqrt{65}-\sqrt{63}<\frac{2}{15}\approx 1{,}333\ldots.$$

Ezért a lehetséges válaszok: A vagy B.
Pontosabban kell számolnunk! Mivel

$$\sqrt{n+a}+\sqrt{n-a}<2\sqrt{n}\quad \text{ha}\quad 0<|a|\leqq n,$$

ezért $n=64$, $a=1$ esetén kapjuk, hogy $\sqrt{65}+\sqrt{63}<16$

$$\sqrt{65}-\sqrt{63}>\frac{2}{16}=0{,}125.$$

A *25. feladat* megoldásánál felhasználhatjuk a $P(x_0;y_0)$ pontnak az $ax+by=c$ egyenletű $(a^2+b^2>0)$ egyenestől való távolságára vonatkozó összefüggést, vagyis azt, hogy

$$d=\frac{|ax_0+by_0-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

4. Az 1988. évi AHSME feladatai:

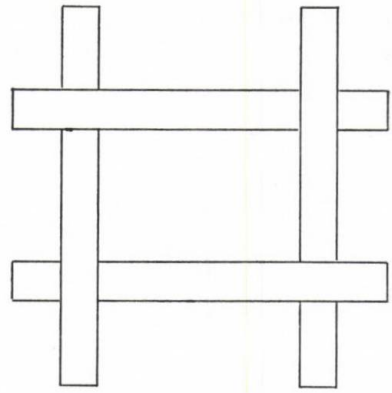
1. $\sqrt{8}+\sqrt{18}=$

(A) $\sqrt{26}$ (B) $2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ (C) 7 (D) $5\sqrt{2}$ (E) $2\sqrt{13}$.

2. Az ABC és XYZ háromszögek hasonlóak, az A csúcsnak az X csúcs, a B csúcsnak az Y csúcs felel meg. Ha $AB=3$, $BC=4$ és $XY=5$, akkor $YZ=$

(A) $3\frac{3}{4}$ (B) 6 (C) $6\frac{1}{4}$ (D) $6\frac{2}{3}$ (E) 8.

3. Négy 10 egység hosszú és 1 egység széles téglalap alakú papírcsík az ábra szerinti merőleges elrendezésben fekszik az asztalon. Mekkora területet fednek le az asztalból?



(A) 36 (B) 40 (C) 44 (D) 96 (E) 100.

4. Az $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ egyenes meredeksége

(A) $-\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$

(D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{3}{2}$.

5. Ha b és c konstansok és $(x+2)(x+b)=x^2+cx+6$ akkor c értéke

(A) -5 (B) -3 (C) -1 (D) 3 (E) 5.

6. Egy síkidom pontosan akkor egyenlőszögű paralelogramma, ha

(A) téglalap (B) szabályos sokszög (C) rombusz (D) négyzet (E) trapéz.

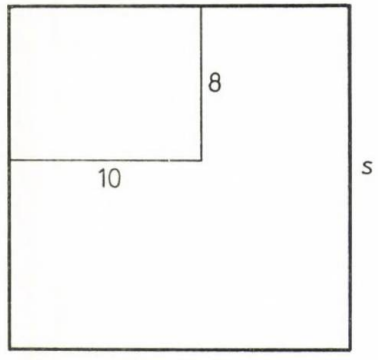
7. Becsüljük meg, hogy mennyi ideig tart 60 adattömb továbbítása egy távközlési csatornán, ha minden tömb 512 szóból áll, és a csatornán 1 másodperc alatt 120 szó továbbítható.

(A) 0,04 sec (B) 0,4 sec (C) 4 sec (D) 4 perc (E) 4 óra.

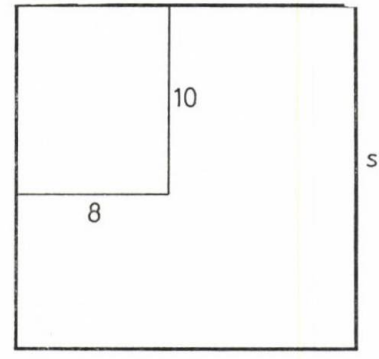
8. Ha $\frac{b}{a}=2$ és $\frac{c}{b}=3$, akkor mennyi $a+b$ és $b+c$ hányadosának értéke?

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$.

9. Egy négyzet alakú kamra sarkában egy 8 dm×10 dm-es asztal áll. (*a)* ábra). A tulajdonos a *b)* ábrán látható elrendezést szeretné megvalósítani. A kamra oldala S dm. Mennyi S legkisebb egész értéke amire az átrendezés megvalósítható anélkül, hogy az asztalt megdöntenénk, vagy kivinnénk a kamrából?



a)



b)

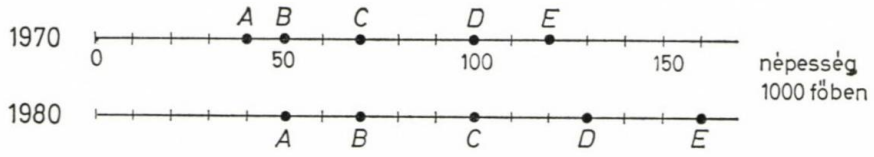
(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15.

10. Egy mérésből tudjuk, hogy a C konstans értéke 2,43865 legfeljebb $\pm 0{,}00312$ hibával. A C értékét olyan kerekített alakban akarjuk megadni, amelyben már minden számjegy helyes. Azaz,

bármennyi is a C, ha C-t szabályosan kerekítjük megadott számú tizedesjegyre, akkor eredményül ezt az értéket kapjuk. C-nek a legpontosabb ilyen közelítése

(A) 2 (B) 2,4 (C) 2,43 (D) 2,44 (E) 2,439.

11. Az alábbi vízszintes egyeneseken az öt nagy pont az A, B, C, D és E városok népességét jelzi a megadott években. Melyik város százalékokban kifejezett növekedése a legnagyobb 1970 és 1980 között?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E.

12. Egytől kilencig minden egész számot felírunk egy papírcédulára és a kapott kilenc cédulát egy kalapba tesszük. Jancsi véletlenszerűen kivesz egyet a kalapból, majd visszateszi. Ezután Jakab húz véletlenszerűen. Melyik számjegy áll leggyakrabban a Jancsi és Jakab által kihúzott számok összegében az egyesek helyén?

(A) 0 (B) 1 (C) 8 (D) 9 (E) minden jegy egyformán valószínű.

13. Ha $\sin x = 3\cos x$, akkor $\sin x \cdot \cos x$ értéke

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{2}{9}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{3}{10}$.

14. Legyen minden a valós és k pozitív egész számra

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{k(k-1)\ldots 2\cdot 1}.$$

Mennyi

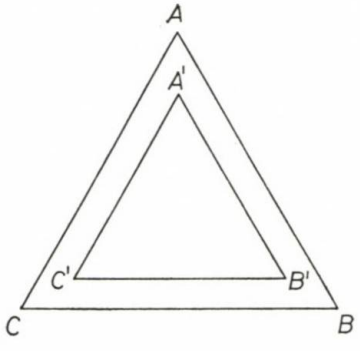
$$\binom{-\frac{1}{2}}{100} : \binom{\frac{1}{2}}{100}$$ értéke?

(A) -199 (B) -197 (C) -1 (D) 197 (E) 199.

15. Ha a és b olyan egészek, hogy x^2-x-1 osztója az (ax^3+bx^2+1) kifejezésnek, akkor b

(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2.

16. Legyen ABC és $A'B'C'$ két párhuzamos oldalú, közös középpontú szabályos háromszög. A BC és $B'C'$ oldalak távolsága $\frac{1}{6}$ része az ABC háromszög magasságának. Ekkor az $A'B'C'$ és ABC háromszögek területének aránya



(A) $\frac{1}{36}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (E) $\frac{9+8\sqrt{3}}{36}$.

17. Ha $|x|+x+y=10$ és $x+|y|-y=12$, akkor $x+y$

(A) -2 (B) 2 (C) $\frac{18}{5}$ (D) $\frac{22}{3}$ (E) 22.

18. Egy tekeverseny második fordulójában az első forduló első öt helyezettje újabb játékkal dönti el az első öt díj sorsát. A versenyzőket a következőképpen sorsolják össze: Először az 5. és 4. helyezett mérkőzik. A vesztes az ötödik díjat kapja, a győztes a 3. helyezettel játszik a következő játékban. Ennek a játéknak a vesztese a 4. díjat kapja, győztese a második helyezettel mérkőzik. Ennek a játéknak a vesztese a 3. díjat nyeri, győztese pedig az első helyezettel játszik. Ennek a játéknak a győztese az első díjat, vesztese pedig a második díjat kapja. Hányféle sorrendben kaphatja meg az első öt helyezett az 1., 2., 3., 4. és 5. díjat?

(A) 10 (B) 16 (C) 24 (D) 120 (E) egyik sem.

19. Egyszerűsítsd az alábbi törtet

$$\frac{bx(a^2x^2+2a^2y^2+b^2y^2)+ay(a^2x^2+2b^2x^2+b^2y^2)}{bx+ay}.$$

Az eredmény

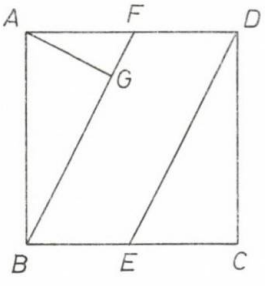
(A) $a^2x^2+b^2y^2$ (B) $(ax+by)^2$ (C) $(ax+by)(bx+ay)$ (D) $2(a^2x^2+b^2y^2)$

(E) $(bx+ay)^2$.

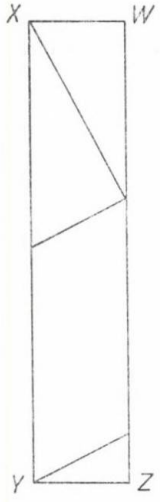
20. Az *a)* ábrán látható 2 egység oldalú négyzetet négy részre vágjuk úgy, hogy E és F a szemközti oldalak felező pontjai és AG merőleges BF-re. Az így kapott négy síkidomból egy téglalapot rakhatunk össze a *b)* ábra szerint. Mennyi lesz a téglalap XY magasságának és YZ alapjának az aránya?

(A) 4 (B) $1+2\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{5}$

(D) $\frac{8+4\sqrt{3}}{3}$ (E) 5.



a)



b)

21. A z komplex számra $z+|z|=2+8i$ érvényes. Mennyi $|z|^2$? (Ha $z=a+bi$, akkor $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.)

(A) 68 (B) 100 (C) 169

(D) 208 (E) 289.

22. Hány olyan x egész szám van, amelyre a 10, 24 és x oldalú háromszög hegyesszögű?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) több mint 7.

23. Egy $ABCD$ tetraéder élei 7, 13, 18, 27, 36 és 41 egység hosszúak. Ha $AB=41$, akkor CD értéke

(A) 7 (B) 13 (C) 18 (D) 27 (E) 36.

24. Egy kör köré egy egyenlő szárú trapézt írunk. A trapéz hosszabbik alapja 16, és az egyik alapon fekvő szögének sinusa 0,8. Ekkor a trapéz területe

(A) 72 (B) 75 (C) 80 (D) 90 (E) nem egyértelműen meghatározott.

25. Jelölje X, Y és Z embereknek három páronként diszjunkt halmazát. Az átlagéletkort az X, Y, Z, $X\cup Y$, $X\cup Z$, $Y\cup Z$ halmazokban az alábbi táblázat tartalmazza.

halmaz	X	Y	Z	$X\cup Y$	$X\cup Z$	$Y\cup Z$
átlagéletkor	37	23	41	29	39,5	33

Ekkor az $X\cup Y\cup Z$ halmazbeli emberek átlagéletkora

(A) 33 (B) 33,5 (C) $33,66\dot{}$ (D) $33,83\dot{3}$ (E) 34.

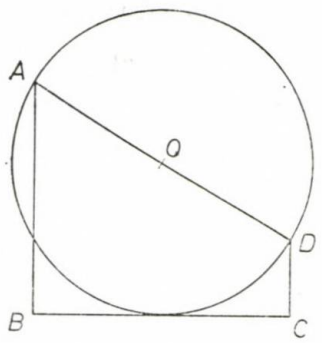
26. Tegyük fel, hogy p és q olyan pozitív számok, amelyekre

$$\log_9 p = \log_{12} q = \log_{16}(p+q)!$$

Mennyi a $\frac{q}{p}$ értéke?

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{8}{5}$

(D) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (E) $\frac{16}{9}$.



27. Az ábrán $AB \perp BC$, $BC \perp CD$ és BC érinti az O középpontú AD átmérőjű kört. Az alábbi esetek melyikében lesz az $ABCD$ trapéz területe egész szám

(A) $AB = 3$, $CD = 1$ (B) $AB = 5$, $CD = 2$ (C) $AB = 7$, $CD = 3$

(D) $AB = 9$, $CD = 4$ (E) $AB = 11$, $CD = 5$.

28. Egy szabálytalan érme dobásánál p annak a valószínűsége, hogy fejet kapjunk. Legyen W annak a valószínűsége, hogy öt dobás után pontosan 3 alkalommal kapjunk fejet. Ha $W = \frac{144}{625}$ akkor

(A) $p = \frac{2}{5}$ (B) $p = \frac{3}{5}$ (C) $p > \frac{3}{5}$ (D) p nem egyértelműen meghatározott

(E) nincs olyan p érték, amelynél $W = \frac{144}{625}$.

29. Az ABC háromszög oldalai különböző hosszúságúak, és két magassága 4, illetve 12 egységnyi. Ha a harmadik magasság hossza ismét egész szám, akkor a lehetséges legnagyobb értéke

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) egyik sem.

30. A $2y = x + \frac{17}{x}$; $2z = y + \frac{17}{y}$; $2w = z + \frac{17}{z}$; $2x = w + \frac{17}{w}$ egyenletrendszer valós (x, y, z, w) megoldásainak száma

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 16.

A megoldási kulcs:

D—D—A—B—E—A—D—B—C—D—C—A—E—A—A—C—C—B—B—E—E—A—B—C—E—D—D—D—A—E.

Megjegyzések:

A *10. feladat* alkalmazott matematikai tárgyú. A hibaszámítást nem mindegyik tanuló ismeri, elsősorban csak azok, akik pl. fizikai méréseknél találkoztak vele.

A *12. feladat* megoldását egy mod 10-re vonatkozó összeadó táblázatból lehet leolvasni.

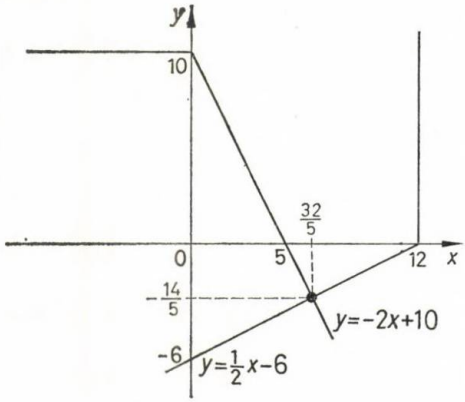
A *15. feladat* azt mutatja, hogy feltétlenül ismertessük meg a legjobb tanulókat a polinomnak polinommal való osztásával.

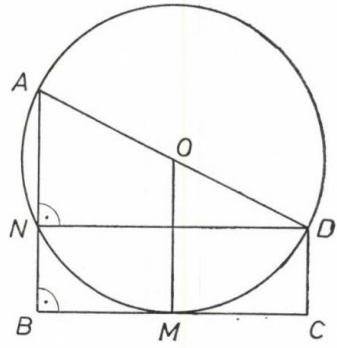
A *17. feladat* megoldását elősegíti, ha ábrázoljuk az

(1) $$y = -|x| - x + 10 = \begin{cases} 10, & \text{ha } x \leqq 0, \\ 2x + y = 10, & \text{ha } x \geqq 0, \end{cases}$$

(2) $$x = -|y| + y + 12 = \begin{cases} 12, & \text{ha } y \geqq 0, \\ 12 + 2y, & \text{ha } y \leqq 0 \end{cases}$$

függvényeket. Megoldást a IV. negyedben kapunk az $x-2y=12$ és a $2x+y=10$ egyenletrendszerből.





A *21. feladat* komplex számokkal foglalkozik. Ezt a témakört az emelt szintű (fakt. vagy tagozatos) osztályok tanulói ismerik.

A *23. feladat* megoldásának a kulcsa a háromszög-egyenlőtlenség teljesülésének a vizsgálata.

A *27. feladat*nál azt kell felismernünk, hogy a trapéz területét a két adott távolság, vagyis AB és CD segítségével is kifejezhetjük. Az ábrán bevezetett új jelöléseket felhasználva kapjuk, hogy $BM^2=BN\cdot BA$, de $BM=\frac{1}{2}\cdot BC$ és $CD=BN$ miatt $BC=2\sqrt{CD\cdot AB}$. Ezért $T_{ABCD}=$ $=(AB+CD)\cdot\sqrt{AB\cdot CD}$ akkor lesz egész szám, ha $AB\cdot CD$ teljes négyzet, ez pedig a (D) válasz.

RADNAINÉ SZENDREI JULIANNA
főmunkatárs
OPI

Caleb Gattegno (1911—1988)

1988. júliusában elhunyt Caleb Gattegno, a világ matematikaoktatási mozgalmának páratlan egyénisége.

Ki volt Gattegno?

Alexandriában nőtt föl. Kairóban, Londonban és New Yorkban élt. Munkahelye azonban az egész világ volt. Tanítók, tanárok nemzedékeit tanította új módszerekre. Személyisége rendkívüli benyomással volt hallgatóira. Pedagógusoknak tartott előadásai, tanfolyamai felgyújtották hallgatói képzeletét. Oly mélységben tudta megvilágítani a gyerek lényét, hogy igen sokan az ő hatására megváltoztatták tanítási gyakorlatukat.

Tudós volt, de mindig tanuló maradt. Az emberi természet tanulmányozója. Örökké izgatta a kérdés: „hogyan tanul az ember". Tanításában, írásaiban mindig következetesen, magabiztosan és kényszerítő erővel mutatta be azt a szellemi erőt, amellyel mindenki rendelkezik. Amelynek legfőbb látható bizonyítéka mindaz, amit megtanítottunk magunknak csecsemőkorunk óta. Megtanítottuk magunkat enni, járni. Megtanítottuk magunknak a színeket, fogalmakat. Ha odafigyelünk erre, kikutatjuk jobban a tanulás folyamatát, megsokszorozhatjuk azt a segítséget, amit a tanár a gyereknek nyújthat. Hiszen nem tanulhatunk helyette!

Alapítója volt az angol matematikai tanáregyesületnek az ATM-nek (Association of Teachers of Mathematics). Alapítója, egyik megteremtője és munkása annak a nemzetközi bizottságnak, amelyik alakulása óta a matematikatanítás jobbításán fáradozik (CIEAEM, Commission internationale pour l' etude

et l' amélíorization del' enseignement des mathématiques).* Számos munkaeszközt fejlesztett ki a matematikatanítás segítésére. Ő alkotta meg a szöges-táblát (amelyet geobord néven ismernek más országokban)**. Tanárok ezreit tanította meg a Cuisenaire belga tanár által készített színes rudak készletének okos, és eredményes használatára.

A világ minden táján, mindenféle iskolatípusban, mindenféle képességű gyerekek tanítását vállalta, bemutató tanítás formájában is.

Egyéniségével megismerkedhetünk egy óraleírásból, amely John Holt, „Hogyan vallanak kudarcot a gyerekek"*** című, naplószerűen írt könyvéből való. A tanítási órán az általános iskolában nálunk is használt színes rudak készletét használják. A készlet négyzet alapú hasábokból áll. Mindegyik alapnégyzet 1 cm oldalú. A hasábok magassága 1, 2, 3, ..., 12 cm. Az azonos nagyságú hasábok azonos színűek. Mi inkább rudaknak és nem hasáboknak nevezzük az órán ezeket, de a fordításban nem változtattuk meg az eredeti szóhasználatot.

* * *

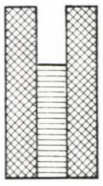
1959. október 1.

A Lesley-Ellis iskolában Gattegno professzor nemrég bemutató órát tartott. Sohasem fogom elfelejteni ezt az órát. A legemlékezetesebb látványosság volt, aminek valaha tanúja voltam.

Fejlődésben súlyosan visszamaradt, értelmi fogyatékos gyerekeket tanított, öt-hat 14 év körüli kamaszt. Voltak, akik nemsokban különböztek az ilyen korú normális gyerektől, csak kifejezéstelen arcuk árulta el visszamaradottságukat. Az egyik fiút, aki az asztal végén ült, állandóan figyelemmel kísértem. Magas volt, sápadt, a haja fekete. Ritkán láttam még emberi arcot, amely annyi szorongást és feszültséget tükrözött, mint az övé. Bizalmatlanul irányította madártekintetét hol ide, hol oda, mintha folyton attól kellene tartania, hogy ellenség tör rá egy olyan irányból, ahova éppen nem nézett egy másodpercig. Nyelvét folyton mozgatta a szájában: hol az egyik orcáját domborította ki vele, hol a másikat. Az asztal alatt az egyik kezével szünet nélkül vakarta, dörzsölte a lábát. Ijesztő és szánalmas figura volt.

Gattegno minden bevezetés nélkül, minden feszültségoldó kedélyeskedés mellőzésével munkához látott. (Akinél kéznél vannak a színes rudak készletének elemei, az vegye elő, hogy könnyebben követhesse a most következő leírást.)****

Ráállított az asztalra két sötétkét (9 cm hosszú) rudat, egymással párhuzamos helyzetben, és közéjük tett egy lilát (6 cm hosszú). A lila rúd fölött kimaradt egy 3 cm-es üres hely



„Csináljátok utánam!" — ennyit mondott. Megcsinálták. Akkor ezt mondta: „Keressétek meg azt a hasábot, amelyik ideillik." Nem tudom, hogy dolgozott a feladaton a többi gyerek, én csak a fekete hajút figyeltem. Görcsös mozdulatokkal, lázasan igyekezett megoldani. Amikor az asztal közepéről elvett egy-egy

* A bizottság 1988-ban Magyarországon tartotta 40. összejövetelét.

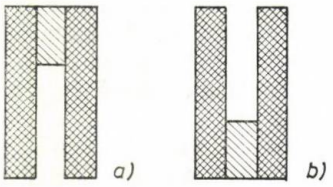
** A szögek és gumikarikák segítségével alakítottunk ki a táblán idomokat. Az eszköz az aritmetika, geometria területén használható.

*** How children fail.

**** A fordításban a nálunk használt színek szerepelnek.

hasábot, hogy kipróbálja, alig-alig tudta a két szélső között rátenni a középsőre. Néhány próbálkozás után ő is, a többiek is megtalálták és a helyére illesztették a világoskék (3 cm-es) rudat.

Akkor Gattegno megfogta fölül a három kék hasábot és kirázta a lilát. (a), ábra) Megfordította a három hasábot úgy, hogy most a világoskék volt lenn, a két sötétkék között. (b), ábra)



A gyerekekkel is megcsináltatta ugyanezt. Akkor arra kérte őket, hogy keressék meg most azt a hasábot, ami az üres helyre illik. Azt hittem, mind megfogja majd a lilát és odateszi. De egyetlenegy sem volt köztük, aki ezt tette volna. Még több próbálkozás után találták csak meg és tették helyére az odaillő hasábot. De végül mindegyik készen volt vele.

Gattegno ekkor megint kirázta a rudak közül az alsót, a világoskéket. Ott maradt üresen a 3 cm-es hely. Megfordította a megmaradókat, mint először, hogy az üres hely felül legyen. Megint megkérdte a gyerekeket, tegyék oda, ami odaillik.

Megtalálták, de ehhez a fekete hajúnak több próbálkozásra volt szüksége. Mégpedig nem tervszerű, inkább ötletszerű próbálkozásra.

Nehéz elhinni, de Gattegno legalább négyszer-ötször megismételte ezt a ciklust, mindaddig, amíg mindenki habozás nélkül, próbálgatás nélkül nem nyúlt a megfelelő rúd után. Én csak néztem és töprengtem: „Milyen lehet az, ha valakinek ennyire nincs fogalma arról, hogy a világ kerekei hogy forognak, ha ilyen kevés érzéke van a világban uralkodó rend, szabályszerűség, összefüggések iránt?" Nehéz akár csak képzeletben is visszahelyeznünk magunkat oda, amikor mint kisgyerekek ezen a fokon voltunk. Nem tények ismeretéről van szó, hanem a környező világ természetének felismeréséről. Kisgyerekek látják ilyennek a világot: szeszélyesnek, kiszámíthatatlannak, olyannak, hogy semminek semmihez nincs köze. A különbség csak az, hogy ezek a kamaszok még a tetejében azt is érzik, amit a kisgyerek nem érez, hogy a világ ellenségük.

Tanúja voltam annak a pillanatnak, hogy a fekete hajú, akit figyeltem, egyszerre látni kezdett. Valami tantusz lepottyanhatott a fejében, mert izgatottan nyúlt, most első ízben, minden próbálkozás nélkül a helyes rúd után. Nagynehezen odatette az üres helyre, és lám odaillett. Szájában a nyelve, térdén a keze kétszeres sebességgel mozgott. Amikor meg kellett fordítani, alig tudta megfogni a keresett rudat és odatenni a helyére; de sikerült. „Ez az! Ez az!" — kiáltotta, és mutatta mindnyájunknak. Többen könnyekig meghatódtunk, látva izgalmát és örömét. Megértettük, milyen ugrásszerű változás következett be a gondolkozásában a szemünk előtt.

Gattegno ezután csak annyit változtatott a feladaton, hogy a két sötétkék (9 cm-es) rúd közé felváltva a piros (4 cm-es) és citromsárga (5 cm-es) rudat illesztette. A fekete hajúnak most csak egy ciklus kellett ahhoz, hogy hibátlanul rátaláljon a megfelelő módra. Most már nyugodtabb is volt, biztosabb a dolgában.

Aztán, megint más rudakkal, megmutatta nekik Gattegno, mit jelent az, hogy egy valami fele a másiknak. Fehéret (1 cm) és rózsaszínt (2 cm) használt, aztán rózsaszínt és pirosat (4 cm). Megkérdezte tőlük, meg tudnák-e találni valamelyik másik hasábnak is a felét. A feketek hajúnak ez is sikerült. Közvetlenül az óra vége előtt Gattegno megkérdezte, melyik a bordó (8 cm-es) felének a fele. Ki volt az, aki megmutatta? A fekete hajú.

Úgy éreztem, és ma is úgy érzem, hogy bármilyen alacsony intelligenciát mutat-

tak is nála a tesztek és bárhogyan reagált is az életre, amit belőle megismert, ez a fiú ezen az órán intelligensen viselkedett és magasszintű szellemi munkát végzett. Ha elgondoljuk, hogy honnan indult és hova jutott, hogy alig negyven perc alatt a matematikai gondolkozás terén milyen hatalmas utat tett meg, akkor arra kell gondolnunk: ebbe a fiúba különleges képességek lehetnek bezárva.

Életének az a tragédiája, hogy talán sohasem tanítja többé olyan ember, mint Gattegno, aki tudja, amit kevés tanár tud, hogy csak meg kell találnia, hol rejtőzik a diákjainak az intelligenciája — talán nagyon mélyen — és akinek elég jó az intuíciója és elég élénk a képzelőereje, hogy az elrejtőzködött intelligenciára csakugyan rátaláljon. Nem volt nagy gyakorlata visszamaradott gyerekek tanításában, de egy pillanat alatt átlátott valamit, amit én csak napok vagy hetek alatt, vagy talán sohasem vettem volna tudomásul. Mégpedig azt, hogy ezeknek a gyerekeknek az intelligenciáját másképpen nem lehet felszabadítani csak úgy, hogy szilárd talajt adunk a lábuk alá: visszamegyünk nagyon messzire, a tanulás és a megértés alapjaiig. Sikerének ez volt az egyik titka, de nem az egyetlen. Legalább ennyit számított az a meggyőződése, hogy megfelelő körülmények között mindegyikük kitűnően tud és akar gondolkozni. Magatartásában, modorában nem volt semmi leereszkedő, de még a szánalomnak sem volt semmi nyoma. Az óra folyamán ő és ezek a gyerekek kollégák voltak, akik együtt igyekeznek megoldani valami nehéz problémát — és végül meg is oldják.

URBÁN JÁNOS
osztályvezető
OPI

Rövid beszámoló a Hatodik Nemzetközi Matematikaoktatási Kongresszusról

(ICME—6)

Az ICMI (International Comission on Mathematical Instruction) és a Bolyai János Matematikai Társulat 1988. július 27-től augusztus 3-ig Budapesten rendezte meg a 6. Nemzetközi Matematikaoktatási Kongresszust. (International Congress on Mathematical Education).

A kongresszusra 72 országból mintegy 2400 matematikus, matematikatanár, matematikatanítással foglalkozó kutató jött el. Magyarországról kb. 300-an vettek részt, ebből mintegy 200 fő tanító, általános és középiskolai tanár.

A kongresszus fővédnöke *Grósz Károly,* védnökei *Köpeczi Béla, Berend T. Iván, Iványi Pál és Fodor Lajos,* a BME rektora voltak. Grósz Károly, Köpeczi Béla és Berend T. Iván külön levélben köszöntötte a kongresszus résztvevőit.

A megnyitó és a záró plenáris ülést, továbbá a július 30-i főleg magyaroknak szóló programot a Kongresszusi Központban rendezték meg, a többi esemény színhelyei a BME központi, valamint E, R, Z épületei voltak.

A plenáris ülésen elhangzott 5 előadás közül kiemelkedett *Lovász László* akadémikus előadása, aki az algoritmikus szemléletmódnak a matematikában és a matematika oktatásában játszott növekvő szerepéről beszélt, továbbá *Jean-Pierre Kahane,* az ICMI elnökének Pólya György matematikai és pedagógiai munkásságáról szóló előadása.

A kongresszus munkájának zöme reggel fél 9-től este 9 utánig párhuzamosan tartó szekciókban zajlott. A hagyományok alapján. Összesen 7 korcsoportban, 7 témacsoportban, 15 speciális területet átfogó szekcióban, valamint poszterbemutatókon, nemzeti kiállításokon és projectek bemutatóin folyt a munka. Erről a szerteágazó, sokrétű, sokszámú

párhuzamosan futó tevékenységről nehéz átfogó képet alkotni. Elsősorban a személyes benyomások, a szakmai, baráti beszélgetések és a záráskor elhangzott hivatalos, vagy informális értékelések adhatnak támpontot a beszámolóhoz.

Szembetűnő volt az, hogy sok más országban (pl.: Szovjetunió, Nagybritannia, Franciaország) milyen sokat és eredményesen foglalkoznak a matematikatanítás pedagógiájával, ott ez a tevékenység megfelelő tudományos elismerésben is részesül.

Érdekes tapasztalatot szereztünk azokból, ahol idáig nem volt egységes matematika-tanterv. Ezek egy részében kifejezett törekvés tapasztalható egységes, állami matematika-tanterv kialakítására. Például Angliában ennek kidolgozására már konkrét határidő is ki van tűzve.

Igen sikeresek voltak a különböző kiállítások, műhelymunkák, amelyek azt igazolták, hogy világszerte ismét előtérbe kerül az a törekvés, hogy az absztrakt matematikai fogalmak kialakításához igen fontos a konkrét, sokrétű tapasztalati megalapozás az órán. Rajzolgatással, építéssel, modellezéssel, sokfajta tevékenységgel kell a gyerek konstrukciós képességét kialakítani.

Népszerűek és élménytadóak voltak az angol matematikatanárok egyesületének (ATM) bemutató foglalkozásai. Magyar általános iskolai tanulókkal és a kongresszuson résztvevő, angol nyelvterületről jött családok gyerekeivel foglalkoztak. A játékos bemutatók azokat a módszereket propagálták, amelyek a tanulók aktív, elsősorban mozgásos tevékenységére alapozzák a matematika egyes fogalmainak, eljárásainak megtanulását.

Tanulságos, érdekes vita folyt az egyik szekcióban a mérések, értékelések helyéről, szerepéről a matematikatanításban. A nemzetközi összehasonlító mérések informatív, orientáló szerepét egyértelműen elismerték, de a nemzeti méréseknek mint az ellenőrzés, értékelés módszerének — a vitában résztvevők többsége szerint — igen nagyok a veszélyei.

További érdekes tapasztalat, hogy több olyan országban (pl.: Kanadában), ahol eddig szaktanácsadók működtek, célszerűnek tartják a szakfelügyelői hálózat újraszervezését.

Külön érdemes beszélni a kongresszuson való magyar szereplésről, részvételről. Mivel a kongresszus nyelve gyakorlatilag az angol volt és a sok párhuzamos program közül egyszerre csak egyben volt lehetőség szimultán tolmácsolásra (itt magyar, német, francia, orosz, spanyol és japán nyelvre fordítottak) a szervezők külön igyekeztek tanácsot, eligazítást adni a magyar résztvevőknek. Így találkozókat szerveztek „érdekes emberek"-kel (pl.: H. Fraudenthal; T. C. O'Brien), igen sikeres japán—magyar esetre került sor és a délutánonkénti „happy hour" alkalmával tartalmas tapasztalatcserékre is sor került külföldi kollégákkal. Az esti filmbemutatók, videóműsorok is sok értékes, hasznos ötletet adtak; gyakran egyes poszterek, projectek jelentettek olyan indítást, amelyet egy-egy tanító, tanár a saját munkájában is közvetlenül tud hasznosítani. A kongresszus végén többen megfogalmazták azt a véleményüket, hogy életre szóló élményt jelentett a konferencia számukra, napi munkájukhoz is sok ötletet, segítséget adott.

A magyar matematikatanítás eredményei iránt élénk érdeklődés nyilvánult meg. Úgy tapasztaltuk, hogy világszerte talán valós helyzeténél, eredményeinél is többre becsülik a magyar tehetséggondozást. Élénk érdeklődés és siker kísérte a projectek között az OPI által szervezett magyar bemutatót. A kísérletek, kutatások iránt több ország (pl.: USA) is komolyan érdeklődött. A TANÉRT eszközei, valamint *Árkosi Erzsébet* érdekes, ötletes testmodelljei is ezen a kiállításon kaptak helyet. A bemutatón a *Lénárt István* által tervezett rajzgömb bizonyult az egyik legsikeresebb eszköznek.

Ugyanakkor meg kell azt is mondani, hogy a külföldi résztvevők közül néhány régebbi ismerősünk elmondta, hogy a magyarok még többet mutathattak volna be, még nagyobb propagandát fejthettek volna ki a magyar matematikaoktatás eredményeinek, sikereinek.

A magyar matematikatanítás nemzetközi tekintélyének az értékeléséhez egy adalékként elmondjuk, hogy *B. F. Nebres,* a Fülöp-szigetek oktatási minisztere az első plenáris ülés előadója előadásában három nevet említett, akik a világ matematikatanítására jelentős befolyással voltak, ezek között említette *Varga Tamás* nevét is.

A külföldi résztvevők el voltak ragadtatva a kongresszushoz kapcsolódó egyéb programoktól. Maradandó élményt jelentett a Nemzeti Galéria kupolacsarnokában megrendezett nagyszabású esti fogadás és hangverseny, igen sikeresek voltak a délutánonként öttől-hatig rendezett „happy hour"-ok, amelyeken szendvics, gyümölcs, frissítők és bor fogyasztása közben került sor beszélgetésekre, informális találkozásokra, ismerkedésekre.

Végül, de nem utolsósorban ki kell emelni annak a közel 200 diáknak és tanárnak a szerepét, akik a szervezést, lebonyolítást társadalmi munkában segítették. A konferencia utolsóelőtti napjának estéjén egy rögtönzött kis összejövetelen az ICMI titkára *G. Howson* mondott meleg szavakkal köszönetet a magyar szervezőknek és adta át mindenkinek a nemzetközi szervezőbizottság köszönőlevelét és jelképes ajándékát. Kiemelte a lebonyolítás zökkenőmentes, sikeres voltát, azt, hogy a résztvevők igen jó élményekkel, emlékekkel távoznak Magyarországról. Érdemes lenne javasolni, hogy az önzetlen segítőknek (tanároknak, diákoknak egyaránt) a művelődési miniszter is mondjon köszönetet.

Az elismerés a záróünnepségen is kifejezésre jutott. A következő, 1992-es kongresszust Kanada rendezi, az ő képviselőjük is hangot adott annak, hogy a magyar rendezést igyekeznek majd utolérni.

A kongresszus befejezését követően négy napon át a nemzetközi programbizottság és a szekciók külföldi fő szervezői az OPI esztergomi továbbképző központjában tanácskoztak. A kongresszusról készülő beszámolón dolgoztak. A kiadott tanulmánykötet azóta már eljutott a résztvevőkhöz.

Befejezésül egy idézetet érdemes ideiktatni a sok azóta érkezett levél egyikéből.

„Szeretnénk gratulálni az ICME—6 csodálatos szervezéséért. Olyan esemény volt, amelyik a matematikaoktatók emlékezetében úgy fog megmaradni, mint fő lépés foglalkozásunk előrehaladása irányában és amely hozzásegített bennünket ahhoz, hogy jobban megértsük egymást ezen a Földön. Az előkészítés olyan gondos volt és a kongresszus annyira simán haladt, hogy csak gratulálni tudok a teljesítményért.

Prof. Ubiratan D' Ambrosio
rektor
Campinas Állami Egyeteme
Brazília"

Beszámoló a CIEAEM 40 találkozójáról

A CIEAEM (Commission Internationale pour l Éude et l Amélioration de l Enseignement des la Mathématiques) a matematikatanítás tanulmányozására és annak jobbítására alakult nemzetközi bizottság.

A nemzetközi találkozóra az OPI Matematikai Nevelési Kollégiumának rendszerezésében került sor. Ez csupán a szűk bizottság ülése volt.

A találkozó 1988. július 23-án kezdődött, helye a Bárczi Gusztáv Gyógypedagógiai Főiskola Kollégiuma volt. Ez adott helyet a szakmai megbeszéléseknek is.

A résztvevők július 22-től folyamato-

san érkeztek. A megbeszélések zöme július 23 és 26 között zajlott le, de további értekezletekre került sor az ICME—6 konferencián is. A résztvevők augusztus 3-án tartották utolsó összejövetelüket.

A találkozó három fő témakörrel foglalkozott:

1. A Bizottság munkájának távlati feladatai,
2. A Bizottság vezetőségének újraválasztása (erre négyévenként kerül sor),
3. Az 1989. évi nyitott konferencia előkészítése.

1. A Bizottság egyéb nemzetközi szervezetekkel való kapcsolatainak megvitatása után azokra a speciális kutatási, kutatásirányítási feladatokra került sor, amelyeket a bizottság a matematikatanítás nemzetközi porondján betölt.

   Továbbra is helyesnek tartják a résztvevők azt, hogy a nyitott konferenciák a matematikatanítás egyes központi témakörét vagy tevékenységi körét dolgozzák fel, lehetőséget teremtve a felgyűlt tapasztalatok megbeszélésének, ütköztetésének, esetleges állásfoglalások kialakításának. Központi feladatnak tekinti a Bizottság a fiatal kutatók munkájának megismerését és felhasználását. Döntés született arról is, hogy a bizottság egy európai országban, valószínűleg Svájcban bejegyezteti magát.

2. Titkos szavazással került sor az új vezetőség megválasztására. A bizottság új elnöke: *A. I. Weinzweig* professzor, az University of Illinois at Chicago Matematikai Statisztikai és Computertechnikai Tanszékének tanára lett.

   A bizottság új alelnöke: *Szendrei Julianna,* az OPI főmunkatársa és *Gérard Audibert* a Montpellieri Egyetem professzora, a bizottság pénztárosa *Angelo Bertoletti* Locarnóból, titkára pedig *Jan de Lange* Utrechtből. Három meghívottat kooptált a bizottság tagjai közé.

3. A következő nyilvános konferencia színhelye Brüsszel lesz. Témája: Szükség van-e matematika-tantervre? A nyilvános konferencia főszervezője *Francis Michel* (Ecole Decroly) lesz.

A bizottság augusztus 1-én kötetlen összejövetelt tartott *Varga Tamás,* a Bizottság néhai alelnöke baráti körével, és kifejezte annak szükségességét, hogy alakuljon egy olyan alapítvány, amelyik a matematikatanítás ügyével foglalkozó tanárok, kutatók munkáját segíti. Az alapítvány létrejötte után a bizottság is hozzá kíván járulni az alapítvány vagyonához.

A Bizottság kis ünnepség keretében köszönetet mondott a vendéglátóknak, és a napi munkát segítő szervezőknek, kísérőtolmácsoknak.

Szendrei Julianna

A 6. Nemzetközi Matematikaoktatási Kongresszus gazdag tapasztalatanyagának további hasznosítása volt a célja annak a tanácskozásnak, amely a TIT Stúdió támogatásával, a TIT Országos Matematikai Választmányának kezdeményezésére jött létre.

1989. február 18-án (szombaton), egynapos, rövid beszámolók segítségével felidézték a magyar szervezők a konferencia eseményeit, az ország minden területéről érkező, 230 résztvevő tájékoztatást kapott az egyes területeken végzett munkájukról az eseményekből leszűrhető tapasztalatokról.

A TIT Stúdió segítségével lehetővé válik egy rövid, magyar nyelvű kiadvány megjelentetése is. Ugyancsak támogatást kapunk további összejövetelek megszervezéséhez is. A következő cikk szerzője Ambrus András a „Matematikatanítás elmélete" című témacsoport magyar koordinátoraként számolt be tapasztalatairól.

AMBRUS ANDRÁS
adjunktus
ELTE TTK, Budapest

A matematikatanítás néhány kérdése külföldi szemmel nézve

Világjáró emberek lettünk, az utóbbi években tömegesen nőtt a külföldre utazók száma. Szerencsére mind több szakembernek van lehetősége — igaz legtöbbször a külföldi kapcsolatai és nem a hazai lehetőségek révén — külföldi szakmai tanulmányutakon, nemzetközi konferenciákon részt vennie. Felvetődhet a kérdés: mi a hozamuk ezeknek az utaknak, mit hasznosít belőlük a kiutazó, s mit az ország, a társadalom? Gyakran hallom, hogy e tanulmányutak többsége jó kis turistáskodás állampénzen. Ezt az állítást sem cáfolni, sem megerősíteni nem tudom, ám az alábbiakkal azt szeretném illusztrálni, hogy egy-egy tanulmányút, világhírű szakemberekkel való találkozás emlékélménye hosszú ideig él, bennem, meghatározza érdeklődésemet, újabb és újabb szakirodalom áttanulmányozására késztet. A matematikatanítás néhány centrális problematikáját szeretném bemutatni, elemezni.

Divatok, reformok

A. Z. Krygowska lengyel matematikadidaktikai professzornővel Krakkóban találkoztam. (1988-ban sajnos elhunyt.) Az ő munkássága (főleg Varga Tamásnak köszönhetően) jelentős hatást gyakorolt a magyar matematikaoktatásra is. Krygowska szerint a matematikaoktatás jelentős problémája, hogy egy-egy összeállított, megszerkesztett tantervet tűzönvízen keresztül megvalósítandónak tart. A tantervekkel kapcsolatos kísérletek is csak azt vizsgálják, hogyan lehet az előírtakat eredményesebben megtanítani, keveset törődünk azzal jó-e a tanterv, egyáltalán megvalósítható-e, nem kellene-e kontrollálni ilyen szemszögből is? Neki is köszönhetően Lengyelországban már a nyolcvanas évek elején megalakult egy bizottság, melynek feladata volt különböző szempontok alapján megvizsgálni a tantervek minőségét. A bizottság tagjai matematikusok, didaktikusok, pedagógiai, pszichológiai kutatók és gyakorló tanárok voltak. Krygowska szerint nagyon fontos egy „semleges" szakemberekből álló bizottságnak a tanterveket kontrolláló, ellenőrző munkája.

Az oktatási gyakorlat sem mentes divatoktól, reformhullámoktól, gyakran ezek túlzásaitól. Az 1960-as, 70-es évek nagy matematikatanítási reformmozgalma volt az „Új matematika" irányzat, mely a szocialista országokra is erős hatást gyakorolt. Amikor Krakkóban jártam, ott már elcsitulóban volt a nagy zaj az irányzat körül, egyre erősödtek a bírálatok is. Krygowska óvott az egyoldalúságtól, kategórikus kijelentésektől. Helytelenítette például a szovjet gyakorlatot, ahol a Kolmogorov-féle, absztrakt, halmazelméletre épülő matematikatanítási gyakorlatot felváltották a Pogorelov-féle koncepcióval, kiűzve az előbbi sok értékes vonását is a tanítási gyakorlatból. Helytelenítette, hogy az akadémikusok nézeteltéréseinek az oktatási gyakorlat látta kárát.

Az „Új matematika" reformirányzat sok pozitív vonást is tartalmazott, ezeket higgadtan meg kell menteni az oktatás számára. Nem halmazelméletet kell tanítani, hanem a halmazszemléletet kell előnyben részesíteni egyes problémáknál — egyenletek, egyenlőtlenségek. Persze mindig ügyelni kell arra, hogy ez ne jelentsen formalizmust, merev szimbolizmust.

Krygowska professzornő pályája során végigjárta az összes iskolafokozatot, mint gyakorló pedagógus. Tanított alsó tagozaton mint tanítónő, később közép-

iskolai tanár lett, majd főiskolára került. Iskolai tapasztalatai sokat segítettek neki abban, hogy ne essék a szép elméletek rabjává, hanem a konkrét iskolai valóság szemszögéből vizsgálja, értékelje az új problémákat. Ezért is tartotta fontosnak a didaktikai tervezetek osztálykeretekben való kipróbálását, a tanulók matematikai gondolkodásának a megfigyelését valódi, életszerű helyzetekben. E téren Krygowska szerint nemzetközi szinten is jelentős a lemaradás.

Természetszerűleg vetődik fel néhány kérdés a fentiekkel kapcsolatban a hazai matematikaoktatás vonatkozásában. Tanterveink kontrollja megnyugtatóan rendezett-e? Az „Új matematika" reformmozgalom magyarországi hatásainak reális értékelése megtörtént-e már? Mennyire elterjedtek hazánkban az osztálykeretekben, normál osztályszituációkban folyó kísérletek, kutatások? Vonatkoznak a kutatások az átlagos képességű, normál osztályokra is?

A képességek szerint

A holland *Hans Freudenthal* professzorral való találkozások élményei még frissek, pár hónapja beszélhettem vele Utrechtben. Freudenthal a holland iskolai matematikaoktatás atyja, élő klasszikusa, neki köszönhetően például az „Új matematika" reformmozgalom túlzott absztrakt vonala nem kapott teret Hollandiában. A jelenleg folyó, nagyszabású matematikatanítási kísérlet szellemi elindítója, támogatója.

Néhány megszívlelendő észrevétele, tanácsa:

1. A tömegoktatásban első helyen kell állnia a környezet, a valóság problémáinak, ezek segítségével, ezeken keresztül kell eljutni a matematikai fogalmakhoz, összefüggésekhez. A legabsztraktabb matematikai fogalmakat is a valóságba ágyazottan kell tanítani. A tanulók számára készített kísérleti tanítási anyagokban sok fényképet, grafikont, művészi reprodukciót láthattunk. Például a perspektivikus ábrázolás bevezetése világhírű Dürer festmények reprodukcióinak elemzésével kezdődik, s több híres épület, ipari létesítmény fényképével illusztrálják e matematikai eljárás lényegét.

A Kombinatorika fejezetben egy lóverseny célfotója, az 1987-es wimbledoni teniszverseny férfi versenyének teljes sorsolási táblázata, továbbá az 1988-as labdarugó Európa bajnokság NSZK—holland mérkőzéséről készült felvétel szerepel. Ez utóbbi abból az apropóból, hogy egy 6:4-es eredményű mérkőzés alakulásának összes lehetőségét kellett a tanulóknak meghatározniuk.

Freudenthal azért tartja fontosnak az ilyenfajta feldolgozási módot, mert így jobban látják a tanulók a matematika hasznát, a környezetükből vett problémák érdekesebbek számukra, másrészt a fiatalabb tanulókra jellemző konkrét gondolkodás miatt is szükséges a matematikai problémák környezeti, valóságbeli szituációkba való beágyazása.

2. Fontosnak tartja Freudenthal matematikai képességeik szerint szétválasztani a középiskolai tanulókat. A holland középiskolában különböző szintű matematikai stúdiumok vannak, ezek teljesítésétől függően lehet bizonyos egyetemekre, főiskolákra bejutni. Ha valaki bölcsészvonalon akar például továbbtanulni, annak nem kötelező tizenhat éves korától matematikát tanulnia.

3. Freudenthal szerint igen fontos a matematikaórák nyugodt, alkotó légköre. Lehetőséget kell teremteni a problémák nyugodt elemzésére, a különböző vélemények összevetésére, a próbálkozásokra, a kísérletezésre. Ez csak akkor lehetséges, ha nem lebeg állandóan a tanulók feje felett a számonkérés Damoklesz kardja. Tehát nem szabad a matematikaoktatás során mindig mindent számonkérni, egy bővebb ún. „hátteranyaggal" kell dolgozni.

4. A különböző tantervek összeállításakor figyelembe kell venni a tanulók reális képességeit is. Fentről elhatározhatunk szép dolgokat, de a döntő az, hogy a tanulók miként tudják meg-

emészteni, feldolgozni mindezt. Freudenthal tapasztalatai szerint például a matematikai analízis olyan nehézségeket okozott még az első éves egyetemi hallgatóknak is, hogy jelenleg már csak a felsőbb években van ilyen stúdium Utrechtben. Véleménye szerint a középiskolában szó sem lehet absztrakt analízis tanításáról, ott csak a valóság problémáiba ágyazott analízisnek van helye, szemléletes szintű feldolgozásban.

Visszatérve hazai dolgainkra: alapfokú oktatásunkban kellő hangsúllyal fordulnak-e elő a valóság problémái? Nem kellene-e újra gondolni középiskolai matematikaoktatásunk szerkezetét, s főként a humán beállítottságú tanulók számára előírt tananyagmennyiséget?

A tanártovábbképzésről

Ezzel kapcsolatban két pozitív példa él bennem.

Pozsonyban működik egy matematikatanári klub az egyetem matematikadidaktikai docensének vezetésével. Havonta egyszer jönnek itt össze gyakorló középiskolai matematikatanárok. Előre megbeszélt, közösen kialakított program szerint dolgoznak, minden alkalommal egy-egy aktuális témáról a szakirodalom és az iskolai valóság alapján előadást tart egy-egy tanár, esetenként neves kutatókat, szakembereket is meghívnak. Ottjártamkor például egy prágai pszichológus tartott élénk eszmecserével egybekötött előadást. A tanárok szívesen járnak a rendezvényekre, mert mindennapi problémáikat, gondjaikat oszthatják meg egymással, tanácsot kaphatnak kollégáiktól, másrészt a legújabb matematikadidaktikai szakirodalom áttanulmányozása, megvitatása révén ismereteik bővülnek, elméleti felkészültségük magasabb szintű lesz. Jellemző a klub népszerűségére, hogy még száz kilométerről bejáró tagja is van.

A másik követendő példa Hollandiából való. Itt egy nagyszabású matematikatanítási kísérlet folyik egyetemi szakemberek, tantervfejlesztők és döntő többségében gyakorló tanárok részvételével. Ez utóbbiaknak valódi beleszólási joguk van a tantervek, tanítási anyagok kialakításába, nem csak a felülről kapott tananyagot kell megszabott útmutatások alapján „letanítaniok". Tapasztalataikat rendszeresen megvitatják, a tervezeteket javítják, korrigálják.

Az 1988-ban kezdődött kísérletben 1990-ben már negyven iskola vesz majd részt, több mint száz tanár fog bekapcsolódni a kísérletbe. A kísérletben résztvevő tanárok érzik, hogy fontos a munkájuk, a véleményük, ez fokozza a pályához való kötődésüket. Érdemes megemlíteni még, hogy a kísérlet eredményességének mérését egy teljes független intézmény végzi, ebben a munkában nem vesznek részt a kísérlet résztvevői.

A tanárok ilyen jellegű bevonását a kísérletező, kutató munkába azért tartom nálunk is lényegesnek, mert jelenleg még a legtehetségesebb tanáraink némelyike is fél tapasztalatait, ötleteit továbbadni, egy folyóiratban megjelentetni. Fiatal, tehetséges és sikeres középiskolai matematikatanár ismerősömmel beszélgettünk a matematikatanítás kérdéseiről. Elmondta friss tapasztalatait a logikai neveléssel kapcsolatban. Jól átgondolt, világos koncepciót ismertetett meg velem. Amikor megemlítettem neki, hogy jó lenne mindezt megjelentetni módszertani folyóiratunkban, megijedt és tiltakozva mondta: „Mit szólnának hozzá a matematikatudomány képviselői? Az általam elmondottak nem új felfedezések, egyszerűen azt mutattam be, hogy hogyan tanítok."

Kérdéseim: A sok gonddal küszködő továbbképzési rendszerünknek nem kellene-e egy a pozsonyihoz hasonló klubbal is próbálkoznia? Jómagam kész vagyok a szervezésében és munkájában is résztvenni. Kísérleteinkbe bevonjuk-e az ország széleskörű pedagógustársadalmát? Mennyire megoldott hazánkban az oktatási kísérleteknek a benne résztvevőktől független mérése, értékelése?

Kicsik és nagyok

Érdekes problémát vetett föl Pozsonyban *Milan Hejny*, a Komenski egyetem tanára. Akkortájt kezdődött el az absztrakt matematikát túlzottan előtérbe állító reformmozgalom értékelése, bírálata. Hejny ezzel kapcsolatban is mondta, úgy látszik a kis országok számára nem megnyugtató megoldás a vezető hatalmak — USA, Szovjetunió, Anglia, Franciaország, NSZK — matematikaoktatási elképzeléseinek, oktatási tartalmainak mechanikus átvétele. Ezeknek az országoknak más a fejlettségi szintje, más az iskolarendszere, vizsgarendszere stb. Hejny ezzel kapcsolatban kifejtette, hogy a kisebb országoknak az eddigieknél többet kellene törődniük egymással, egymás felé is kellene fordulniok, jobban meg kellene ismerniük egymás tapasztalatait.

Van igazság Hejny aggodalmában, de azt is kell látni, hogy a matematikaoktatás hatékonyságának emeléséhez elengedhetetlenül szükséges az egész világban végbemenő változások, eredmények ismerete. Persze a vezető irányzatok, elvek adaptálását a hazai viszonyokhoz igazítva kell elvégezni. Úgy is mondhatjuk, hogy a másutt felvetődő kérdéseket, problémákat itthon is fel kell vetni és a hazai viszonyoknak megfelelően kell a válaszokat megadni. Ennek mikéntje nem megoldott még nálunk sem. Megfontolandó és válaszra váró kérdés: hogyan történik a nemzetközi matematikatanítási irányzatok értékelése és a hazai oktatási gyakorlatba való beépítése?

A vizsgák

Londoni tanár ismerőseimtől iskolai tankönyvek felől érdeklődtem, szerettem volna hazahozni belőlük néhány példányt. Meglepődtek a kérésen, hiszen Angliában nem árusítanak tankönyveket a boltokban. A tanulók az iskolájukon keresztül kapják meg a tankönyveket, amelyeket a tanév végén vissza kell adniuk, mert a következő tanévben már egy másik tanuló fogja használni azokat. Meglepő kérdést tettek föl vendéglátóim: „Olyan gazdag Magyarország, hogy megengedheti magának a sokfajta tankönyv évről évre való, nagy példányszámú kiadását?"

Az angol oktatási rendszerben fontos helyet foglalnak el a vizsgák, s ez egy sor problémát hozott magával. Az egyik, hogy a tanárok „vizsgacentrikusan" tanítanak, már a kezdetektől fogva a vizsgát szem előtt tartva készítik föl a gyerekeket. Vizsgafeladatokat és hasonló feladatokat treniroznak, s emiatt háttérbe szorulnak olyan fontos kérdések mint a próbálkozások, kísérletek, problémafölvetések, sejtés, felfedezés.

A másik jelentős probléma: a vizsgákon azt kellett megnézni, megvizsgálni, hogy mit tud a tanuló és nem azt, hogy mit nem tud. A vizsga ne vegye el a tanulók kedvét, önbizalmát a matematikával kapcsolatban. A saját erőbe vetett hit a matematikai ismeretek alkalmazását illetően nagyon fontos, hiszen a későbbiekben, a gyakorlati életben sokszor kell önállóan alkalmazni a matematikai ismereteket.

Fölvetődött az is, hogy a vizsgák a korlátozott időtartamuk miatt nem alkalmasak sok értékes képesség mérésére (felfedezés, elemzés, kísérletezés stb.). Az angliai matematikaoktatás helyzetét és feladatait kijelölő tanulmány (az úgynevezett Cocroft-jelentés) javasolja ezen képességekkel kapcsolatos tapasztalatok, észrevételek figyelembevételét is a végső vizsgajegy megállapításakor.

Kérdéseim: A mi vizsgarendszerünk miatt — csak írásbeli érettségi vizsga matematikából, az egyetemi felvételi vizsgák feladatközpontúsága — nem túlságosan az ezekre való felkészülésre, azaz bizonyos feladattípusok begyakoroltatására törekszik már az alsóbb középiskolai osztályokban sok tanár, elhanyagolva ezzel olyan kvalitásokat mint elméleti megalapozottság, felfedezési képesség, kísérletezés, értelmes megfigyelőképesség, tervezőmunka stb. fejlesztése?

Fölvetődik-e egyáltalán, hogy a vizsga ne vegye el a tanuló matematikai képességeibe vetett bizalmát, önbizalmát?

Két véglet között

Többször jártam német nyelvterületen (NDK, NSZK, Ausztria). Ismeretes a németek precizitása, elméletpártisága az angolok prakticizmusával szemben. Hozzánk magyarokhoz ez utóbbi van közelebb. Ez persze nem jelenti azt, hogy ne gondolkozzunk el a német felfogásokon, tapasztalatokon.

Főként az NDK matematikaoktatására jellemző a talán kissé túlzott mértékű, részletezett irányítás. A legapróbb részletekig előírják például az egyes órák tartalmát, szerkezetét. Egy jellemző összehasonlítási adat: az NDK 7. osztályos matematika tantervfüzete harmincegyoldalas, míg például a teljes magyar szakközépiskolai matematika-tantervfüzet — I.—IV. osztály — összesen huszonnyolc oldal terjedelmű. Egyenes következmény: a magyar tantervek túl általánosan fogalmaznak. Egy példa: „A matematikaoktatás feladata a logikus gondolkodásra nevelés." Erről a kérdésről semmi több nincs a tantervben, hogy mit ért a szerkesztő pontosan ezalatt, azt nem lehet megtudni. Ezzel szemben a német tantervben mindez részletes elemzésre kerül, mégpedig olyan formában is, hogy az egyes osztályokban mit kell megvalósítani belőle. *Walsch* hallei professzor szerint a helyes megoldás a két véglet között van, véleménye szerint nem szükséges annyira apró részletekre tördelni az oktatás tervezetét mint náluk.

Természetesen merül föl a kérdés, hogy a túl általánosan fogalmazó magyar középiskolai matematika-tantervek hatására nem marad-e háttérben a matematikatanítás folyamán a fontos képességek fejlesztése, s nem kerül-e túlzottan előtérbe az ismeretek halmazának kizárólagos bővítése?

Werner Peschek klagenfurti matematikadidaktikus véleménye szerint sok tanulmány jelent meg a matematika tanításával kapcsolatban az elmúlt években, de ezek a tanulmányok szinte kizárólag tartalmi és szervezési, módszerbeli javaslatokkal foglalkoznak. Nyitva marad viszont a kérdés: hogyan tudják a tanulók a javasolt didaktikai tervezeteket elsajátítani, feldolgozni. A nemzetközi matematikadidaktikai kutatások egyre jelentősebb mértékben fordulnak a tanulók felé. Olyan kérdések kerülnek vizsgálatra mint például a tanulási nehézségek a matematikával kapcsolatban, a gondok leküzdésének módjai, a tehetséges tanulók viselkedése a problémamegoldás során, a szemléltetés, a vizualizáció szerepe a tananyag megértésében stb.

Hartwig Meissner münsteri professzor ezzel kapcsolatban kiemeli, hogy fontos feladat a kutatások során a tanulók megfigyelése, vizsgálata. Tömören fogalmaz: „Számunkra egyetlen gyermek — nevezzük őt például Bastiánnak — éles megfigyelése, teljesítményének alapos elemzése gyakran tanulságosabb, érdekesebb, általánosíthatóbb, mint ezer Bastián statisztikai középértéke. Meggyőződésem, hogy a matematikatanítás hatékonyságának emeléséhez elengedhetetlenül szükséges konkrét esettanulmányok végzése."

Kérdéseim: Mi mennyire tartjuk fontosnak konkrét esettanulmányok végzését, elemzését? Hogyan tükröződik mindez módszertani irodalmunkban? Sok tapasztalt, jó tanár tudna értékes megfigyeléseiről beszámolni. Miért nem számolnak be?

DR. WOLFGANG DÖRBAND
Greifswald
NDK

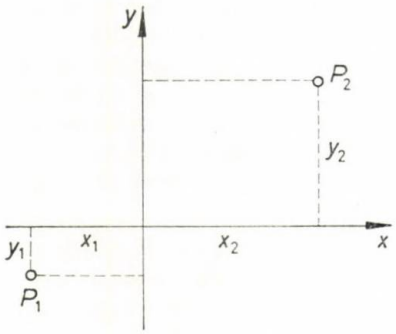
A trigonometria legismertebb tételeinek levezetése a háromszög normálisainak tételéből és a tetraéderre való általánosítás

(Fordította: Dr. Szabó József, Debrecen)

I. Vektorszámítás és a merőlegességi tétel

1. *Vektorszámítás a síkban*

Legyen adott a Descartes-féle koordináta-rendszer és benne a $P_1(x_1; x_1)$ és $P_2(x_2; y_2)$ pontok *(1. ábra)*. A sík önmagában történő párhuzamos eltolását, amelynek során a P_1 pont a P_2 pontba kerül, vektornak nevezzük és V-vel jelöljük. Ezt a koordináták különbségével — a komponensekkel — $V_x = x_2 - x_1$.



1. ábra

Jelölések:

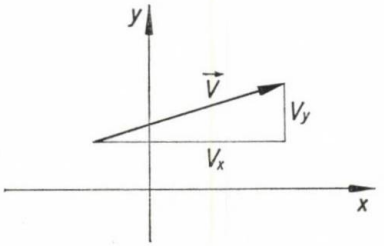
$$V = (V_x; V_y) \quad \text{vagy} \quad V = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}^*, \qquad (1)$$

a vektor hossza:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}. \qquad (2)$$

(2. ábra).

A vektor kezdőpontja nincs rögzítve, tehát tetszőleges, iránya a komponensek viszonya alapján meghatározott, kivéve a $O(0; 0)$ vektort, hiszen a „0/0" határozatlan. A V vektort egységvektornak nevezzük, ha $|V| = 1$.



2. ábra

Egy $(a; b)$ számpárról nem tudhatjuk, hogy az egy $(a; b)$ koordinátájú pont-e, vagy pedig egy a és b komponensű vektor. Az elvi különbségeknek az összefüggésekből kell kiderülni. Megállapodunk azon az ún. helyvektor szóhasználatban, amelynek a kezdőpontja a koordináta-rendszer origójában van. Ezért a $P = (a; b)$ pontot az $L(a; b)$ helyvektorral jellemezhetjük.

Műveletek:

a) Szorzás valós számmal

Legyen δ valós szám és $V = (V_x; V_y)$ egy vektor. Ekkor δV is vektor, egy U vektor, amelyre

$$U = \delta V = \delta(V_x; V_y) = (\delta V_x; \delta V_y). \qquad (3)$$

Ha $\delta = -1$, akkor az U és $-U$ vektorokat ellentétes irányításúaknak vagy antiparalelleknek nevezzük.

* Meghagytuk a német eredeti jelöléseket.

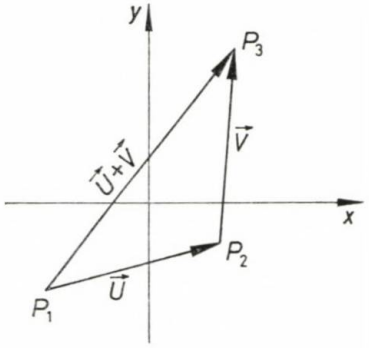
b) Két vektor összeadása

Legyenek $U(U_x; U_y)$ és $V(V_x; V_y)$ adott vektorok. Az összegvektoron azt a C vektort értjük, amelyre

$$C = U+V = (U_x+V_x;\ U_y+V_y). \qquad (4)$$

A vektorok összeadása kommutatív, mert a komponenseknek ez a tulajdonsága megvan.

Legyen U a $P_1=(x_1; y_1)$ pontot a $P_2=(x_2; y_2)$ pontba toló vektor, tehát $U_x=x_2-x_1$, $U_y=y_2-y_1$. V pedig tolja P_2 pontot $P_3=(x_3; y_3)$-ba, tehát $V_x=x_3-x_2$, $V_y=y_3-y_2$. A $C=U+V=(x_3-x_1; y_3-y_1)$ vektor tehát a P_1 pontot a P_3 pontba tolja *(3. ábra)*. A geometriai vektorösszeadás a fizika oktatásában mint az erők összeadása ismert.



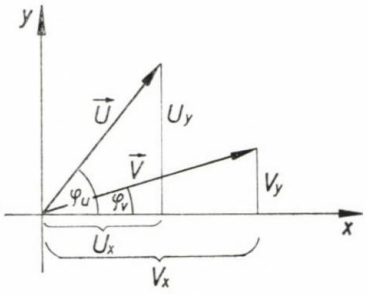
3. ábra

c) Két vektor skaláris szorzata

Legyen $U=(U_x; U_y)$ és $V=(V_x; V_y)$ két adott vektor. A

$$p = U_xV_x+U_yV_y \qquad (5)$$

valós számot a két vektor skaláris szorzatának nevezzük. Így is jelöljük: $p=(U, V)$. Geometriai jelentését a *4. ábrán* tanulmányozhatjuk. Rajzoljuk meg az U és V helyvektorokat.



4. ábra

$$U_x = |U| \cos \varphi_u, \quad U_y = |U| \sin \varphi_u,$$

$$V_x = |V| \cos \varphi_v, \quad V_y = |V| \sin \varphi_v.$$

$$p = (U,V) = |U| \cos \varphi_u \cdot |V| \cos \varphi_v + |U| \sin \varphi_u \cdot |V| \sin \varphi_v.$$

Tehát

$$(U,V) = |U|\,|V| \cos (\varphi_u - \varphi_v). \qquad (6)$$

Következmény:

Az U és V nem O vektorok akkor és csakis akkor merőlegesek egymásra, ha

$$(U,V) = 0. \qquad (7)$$

A skaláris szorzat definíciójából következik továbbá:

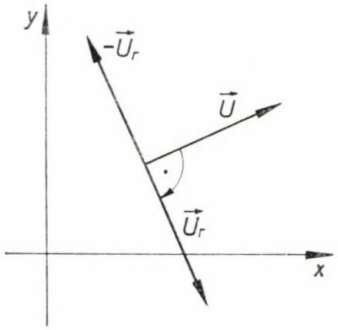
$$(\delta U+\sigma V, W) = \delta(U,W)+\sigma(V,W) \qquad (8)$$

d) Merőleges irányok

Legyen $U=(U_x; U_y)$ egy adott vektor. A síkon két U vektorra merőleges irány van, nevezetesen az

$$U_r = (U_y; -U_x) \qquad (9)$$

és a $-U_r$, U_r vektort az U-ból 90°-os elforgatással kaphatjuk. Nyilvánvaló, hogy $(U, U_r)=U_xU_y-U_yU_x=0$. A továbbiakban a vektornak



5. ábra

csak a pozitív normálisára lesz szükségünk: pl. az $U=(0;-1)$ vektor pozitív normálisa az $U_r=(-1;0)$ vektor *(5. ábra)*.

2. *Vektorszámítás a térben*

A térbeli vektorfogalom a síkbelihez analóg lehet. A tér egy vektorán a tér egy önmagában való párhuzamos eltolását értjük. A meghatározásához három komponensre van szükségünk.

$$V=(V_x;V_y,V_z) \quad \text{vagy} \quad V=\begin{pmatrix}V_x\\V_y\\V_z\end{pmatrix}.$$

A nullvektort ismét $O=(0;0;0)$ módon jelöljük. A síkbeli nullvektorral való felcseréléstől nem kell tartanunk. A (2) és (5) formulákat sematikusan átvihetjük a térre is.

— A térbeli vektor hossza:

$$|V|=\sqrt{V_x^2+V_y^2+V_z^2}, \tag{11}$$

— Valós δ számmal való szorzata:

$$U=\delta V=\delta(V_x;V_y;V_z)=(\delta V_x;\delta V_y;\delta V_z). \tag{12}$$

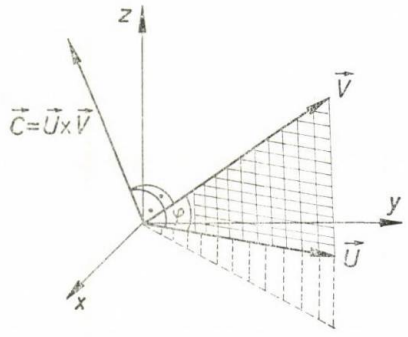
— Az $U=(U_x;U_y;U_z)$ és $V=(V_x;V_y;V_z)$ vektorok összege:

$$C=U+V=(U_x+V_x;U_y+V_y;U_z+V_z). \tag{13}$$

— Az $U(U_x;U_y;U_z)$ és $V=(V_x;V_y;V_z)$ vektorok skaláris szorzata:

$$p=(U,V)=U_xV_x+U_yV_y+U_zV_z. \tag{14}$$

A (6), (7) és (8) a dimenziótól függetlenül érvényes. A (9) átvitele a térgeometriára némi nehézséget okoz. Olyan vektor keresése a cél, amelyik az U és V vektorra egyaránt merőleges. Feltesszük, hogy ezek se nem párhuzamosak, se nem merőlegesek, azaz nincs olyan δ, hogy $U=\delta V$ teljesüljön; tehát rájuk sík fektethető. Létezik tehát két irány, amely egyidejűleg az U vektorra is és a V vektorra is merőleges. Ezek a *6. ábrán* a C és $-C$ vektorok. Legyenek U, V és C egy derékszögű koordinátarendszer vektorai. Akkor a C komponenseire:



6. ábra

$$C=\begin{pmatrix}U_yV_z-U_zV_y\\U_zV_x-U_xV_z\\U_xV_y-U_yV_x\end{pmatrix}. \tag{15}$$

A (15)-ös formulát a (9) térbeli általánosításának tekinthetjük, amely a lineáris algebrából következik, egyébként nem nyilvánvaló. Könnyen utánaszámolhatunk azonban, hogy $(U,C)=0$ és $(V,C)=0$, vagyis C az U vektorra is és a V vektorra is merőleges. Ez a tulajdonsága természetesen a $-C$ vektornak is megvan. A C vektort az U és V vektorális szorzatának nevezik és szimbólikusan így jelölik:

$$C=U\times V. \tag{15}$$

Tulajdonságai:

— A vektori szorzás ferdén szimmetrikus,

$$U \times V = -V \times U, \tag{16}$$

ami a (15)-ből rögtön következik. Továbbá

$$U \times U = 0. \tag{17}$$

— A vektorális szorzat hossza: A (15)-ből következik, hogy $|C|^2=(C, C)=|U|^2|V|^2-(U, V)^2$. Tehát

$$\frac{|C|^2}{|U|^2|V|^2} = 1-\frac{(U,V)^2}{|U|^2|V|^2} = 1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha,$$

azaz

$$|C| = |U||V| \sin\alpha. \tag{18}$$

Geometriai jelentés:

A O, U, V helyvektorok *(6. ábra)* egy háromszöget határoznak meg a térben, amelynek területe $F=1/2|U||V| \sin\alpha$. Az U és V vektorok vektorális szorzatának hossza tehát az általuk felfeszített paralellogrammának a területével egyenlő.

— Könnyen utána számolhatunk, hogy

$$(\sigma U+\delta V)\times W = \sigma(U\times V)+\delta(V\times W). \tag{19}$$

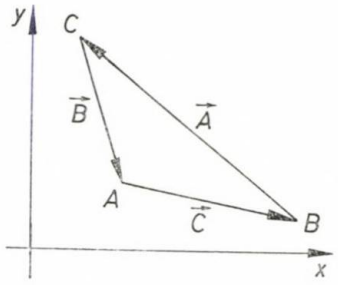
Rövid vektorszámításunkat egy definícióval fejezzük be.

Definíció: Egy vektort, amely egy görbére vagy egy felületre annak egy pontjában merőleges, normálvektornak nevezzük. Ha még ezen kívül egységnyi hosszúságú is, akkor normális egységvektornak mondjuk.

3. *A normálisok tétele háromszögre*

Egy ABC háromszög legyen megadva az $A=(A_x; A_y)$, $B=(B_x; B_y)$, $C=(C_x; C_y)$ csúcspontjainak koordinátáival. Legyen A az a vektor, amely a B pontot C pontba, B vektor az, amely C pontot az A pontba, és C vektor az amely, A pontot a B pontba viszi *(7. ábra)*; azaz

$$A = \begin{pmatrix} C_x-B_x \\ C_y-B_y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A_x-C_x \\ A_y-C_y \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} B_x-A_x \\ B_y-A_y \end{pmatrix}.$$



7. ábra

Ekkor $$A+B+C = O. \tag{20}$$

Forgassuk e vektorokat a (9)-nek megfelelően 90°-kal jobbra. Akkor

$$A = \begin{pmatrix} C_x-B_x \\ C_y-B_y \end{pmatrix} \quad \text{az} \quad A_r = \begin{pmatrix} C_y-B_y \\ -C_x+B_x \end{pmatrix}\text{-be stb. fordul.}$$

Világos, hogy az elforgatott vektorokra is fennáll, hogy

$$A_r+B_r+C_r = 0. \tag{21}$$

Az ABC háromszög oldalainak hosszaira:

$$|A| = |A_r| = a, \qquad |B| = |B_r| = b, \qquad |C| = |C_r| = c. \tag{22}$$

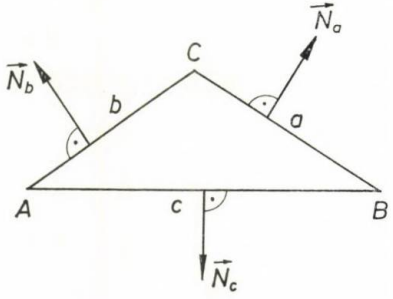
Az elforgatott vektorokra új jelölést vezetünk be:

$$A_r = aN_a, \quad B_r = bN_b, \quad C_r = cN_c, \tag{23}$$

ahol N_a, N_b, N_c az a, b, c, oldalakra merőleges, kifelé irányított egységvektorok.

A (21) alapján írhatjuk ezek után:

$$aN_a + bN_b + cN_c = 0. \tag{24}$$

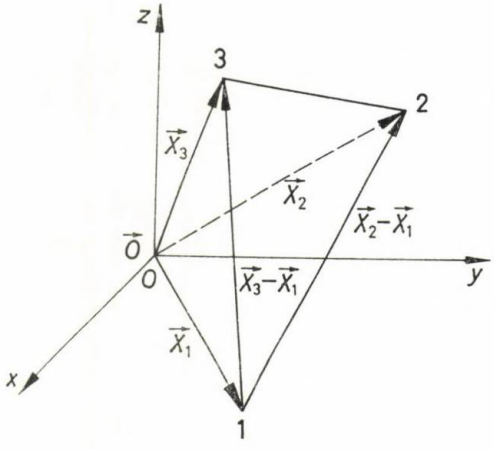


8. ábra

Ezt a tételt az *ABC* háromszög normálisai tételének nevezzük, amelyre röviden normálisok tétele kifejezéssel hivatkozunk. *(8. ábra)* Ez a tétel Gauss integráltételének egy speciális esete. A normálisoknak egységesen vagy mindnek kifelé, vagy mindnek befelé kell mutatniuk. A 2. részben megmutatjuk, hogy a trigonometria főbb tételeti a nomrálisok tétele tartalmazza.

4. *A normálisok tétele tetraéderre*

A háromdimenziós tér E_0, E_1, E_2, E_3 négy általános helyzetű pontja egy tetraéder négy csúcspontját jelentheti, melyeket a továbbiakban egyszerűen 0, 1, 2, 3 indexeikkel jelölünk. A tetraéder oldallapjai háromszögek: S_i $(i=0, 1, 2, 3)$ jelölje azt a lapot, amelyik nem tartalmazza az E_i csúcsot. Ez analógiát mutat a háromszögek szokásos jelölésével, az a a háromszög azon oldala, amellyel szemközt van az A csúcspont. Az S_i lap területe legyen F_i. A tetraéderből kifelé mutató normális egységvektorokat N_i-vel jelöljük *(9. ábra)*. Válasszuk a koordináta-rendszer origójául a O csúcspontot; akkor a csúcsokhoz mutató helyvektorok: $X_1 = O$, X_2, X_3, X_4 lesznek. A (9) szerint vektori szorzatok alapján a felületi normális egységvektorokat az alábbiak szerint írhatjuk fel:



9. ábra

$$N_1 = (X_3 \times X_2)/(2F_1),$$

$$N_2 = (X_1 \times X_3)/(2F_2),$$

$$N_3 = (X_2 \times X_1)/(2F_3),$$

$$N_0 = \big((X_2 - X_1 \times X_3 - X_1)\big)/(2F_0) = (X_2 \times X_3 - X_1 \times X_3 - X_2 \times X_1 + 0)/(2F_0) =$$

$$= (-2F_1 N_1 - 2F_2 N_2 - 2F_3 N_3)/(2F_0).$$

Tetraéderre a normálisok tétele tehát:

$$F_0 N_0 + F_1 N_1 + F_2 N_2 + F_3 N_3 = 0. \tag{25}$$

Az analógia a (24)-gyel nyilvánvaló.

A (25)-ből a 2. részben egy a trigonometriának megfelelő részt fogunk kifejleszteni a tetraéderre vonatkoztatva.

KÖNYVISMERTETÉS

DR. HARTOSNÉ DR. MAGYAR JUDIT
főiskolai adjunktus
Nyíregyháza

Radnainé Szendrei Julianna: „Szakközépiskolai versenyek matematikafeladatai mindenkinek"

A szerző az Országos Szakközépiskolai Tanulmányi Verseny matematikai feladatait dolgozta fel. A könyvben 4 év versenyfeladatait — 1982—85 — ismerteti.

A versenyek évenként kerülnek megrendezésre, három fordulósak. Először az iskolai selejtezők zajlanak, majd az elődöntő és a döntő. 1982-ben az egyes fordulókban 7—6—6, a további években pedig 5—5—5 feladatot tűztek ki. (1984-ben a döntőt 2 csoportban bonyolították le, csoportonként 5 feladattal.)

A verseny matematikai részének célja a szerző szerint az, hogy „azok a tanulók, akik szakmájukban kellően elmélyednek és a verseny győztesei lesznek, szerezzék meg azokat a matematikai képességeket is, amelyek a műszaki főiskolákon vagy egyetemeken való töretlen előrehaladásuk érdekében szükségesek".

A könyv rövid bevezetés után ismerteti évenként a fordulók feladatsorait. Ezek között csillaggal megjelölve a nehezebb feladatokat.

A feladatsorok változatosak. Felölelik a szakközépiskolai tananyag valamennyi fejezetét (arány, kamatszámítás, egyenletek, egyenlőtlenségek, függvények, számelmélet, trigonometria, geometria, sorozatok, kombinatorika, fizikai tárgyú feladatok). Megoldásukhoz nem elegendő a tananyag egyszerű alkalmazása. Az elődöntő és döntő feladatai több esetben különböző témakörök ismeretanyagának együttes alkalmazását és matematikai ötleteket igényelnek.

A könyv főrésze a feladatok megoldásainak ismertetése. Ez a rész azonban messze túlmutat a 69 feladat megoldásának egyszerű ismertetésén. A feladatoknak — ahol lehetséges — többféle megoldását ismerteti a szerző. Ha valamely megoldás során olyan tételt használ fel, amelyet a tanuló nem ismerhet, azt kimondja, esetleg bizonyítja is. Így kerül sor többek között a számelmélet alaptételének és felhasználásának ismertetésére, vagy két szám szorzata, valamint a legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös közötti összefüggés kimondására, bizonyítására, illusztrálására.

A bizonyítások során különböző matematikai módszerekkel ismerkedhet meg az olvasó. Például látunk teljes indukciós, illetve indirekt bizonyításokat, számtani és mértani közepek közötti összefüggésre visszavezethető bizonyításokat stb. A közölt bizonyítások jól követhetők, néhol talán túlmagyarázottak. A szerző szerint ez azért szükséges, hogy így a kevesebb gyakorlattal rendelkezők is követni tudják azokat.

Nagy gondot fordít a szerző a feladatok diszkutálására. A megoldások során vizsgálja, hogy a feladat egy-egy feltételének elhagyásával hogyan módosul a feladat megoldása, hogyan változik a megoldások száma. Több feladat esetében megfogalmazza azok általánosítását, specializálását, illetve felveti azok lehetőségeit.

Síkgeometriai feladatok esetén — ahol lehetséges — utal a probléma térbeli megfelelőjére is.

A könyv szerzője az olvasók figyelmébe ajánlja Pólya György: „A gondolkodás iskolája" és „A problémamegoldás iskolája" című könyveit. Ezek néhány jó tanácsát ismerteti és alkalmazza is a feladatok megoldása során.

A könyv végén a szerző „Témakör mutató"-t közöl. Ez segítséget nyújt a gyakorló pedagógusok számára meghatározott témakörű feladatok kiválasztásához.

A közölt ábrák, táblázatok áttekinthetők, lényegkiemelőek.

A könyvet végigolvasva nemcsak azon tanulóknak ajánlom, akik szakközépiskolai versenyre készülnek, hanem minden a matematika iránt érdeklődő közép- és általános iskolai tanulónak is. Külön figyelmébe ajánlom a könyvet minden általános és középiskolai matematikát oktató tanárnak. mert sok jó ötlettel gyarapíthatja az oktatási gyakorlatát.

Helyreigazítás:

Az 1988. évi XXXV. évfolyam 6. számában „A tanári munka és a tankönyv" című cikkben, a 173. oldalon, a második hasáb 20. sorában, értelemzavaró szedési hiba van, kimaradt a „nem". A kérdéses mondat helyesen: „Ilyen úton nem lehet jelentős tudást szerezni." (Érezhető, hogy a két bekezdés mondanivalójával ez áll összhangban.) Olvasóink szíves elnézését kérjük.

A szerkesztő

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10., II., 10., 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő; a lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1209. Egy börtönben 100 cella van 1-től 100-ig sorszámozva. A foglár százszor sorra járja valamennyi cellát, és k-adik ($1 \leqq k \leqq 100$) útja során minden k-adik záron fordít egyet. A zárak páratlan számú fordításra nyitnak, páros számra zárnak. Mely cellák vannak nyitva a börtönőr századik sétája után?

Bagi Gábor, Barcs

1210. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$x_1x_4 - x_2x_3 = (2y)^2,$$

$$x_1x_2 + x_3x_4 = \sum_{i=1}^{4} (y - x_i)(y + x_i).$$

Tóth Sándor, Sárospatak

1211. Az $A_1A_2 \ldots A_{2n+1}$ sokszög A_1A_2, ..., $A_{2n+1}A_1$ oldalainak felezőpontjai legyenek rendre $F_1, F_2, \ldots, F_{2n+1}$. Igazoljuk, hogy a sokszög síkjában léteznek olyan $P_0 = F_1$, $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n = A_1$ pontok, amelyekre $F_{2k}F_{2k+1}P_kP_{k-1}$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$) paralelogramma!

Számadó László, Budapest

1212. Az $ABC\triangle$ oldalainak hosszát egész számok adják, továbbá $BAC\sphericalangle = \alpha = 2 \cdot ABC\sphericalangle = 2\beta$. Mekkorák az oldalak, ha van közöttük prím hosszúságú?

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

1213. Van-e olyan $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ folytonos függvény, amely racionális helyen irracionális és irracionális helyen racionális értékeket vesz fel?

Mala József és Róka Sándor, Nyíregyháza

1214. Egy 26 lapú konvex poliédernek 12 négyzet-, 8 szabályos hatszög- és 6 szabályos nyolcszöglapja van. A poliéder minden csúcsában valamennyi típusú lap megtalálható. A poliédernek hány belső átlója van?

Feladatmegoldások (1185—1190.)

1185. Az A-ban derékszögű ABC háromszögben meghúztuk az AD magasságot és az AE szögfelezőt. A $BDA\sphericalangle$ felezője AB-t M-ben, az $ADC\sphericalangle$ felezője AC-t N-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy $NEMA$ négyzet!

Megoldás: Az ABC derékszögű háromszöget az AD magasságvonal két derékszögű háromszögre darabolja, melyeknek D csúcsból induló szögfelezői DN, illetve DM merőlegesek egymásra. Az

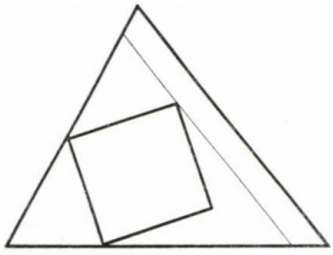
$ANDM$ négyszögben így két szemközti szög összege $A\sphericalangle + D\sphericalangle = 180°$ (*1. ábra*, l. borítón), vagyis a négyszög húrnégyszög, írható köré kör. Ez a kör az E pontot is tartalmazza, hiszen $NAE\sphericalangle = 45°$ és $NDE\sphericalangle = 135°$, vagyis az $NEMA$ négyszög húrnégyszög, és köré írt körének 3 pontja az előbbi kör 3 pontjával azonos. Az ADE derékszögű háromszögnek AE átfogója így átmérője a körnek. N és M pont ugyancsak az AE fölé írt Thalesz körön van, s ezért $ANE\sphericalangle = AME\sphericalangle = 90°$. A $NEMA$ négyszögnek tehát minden szöge derékszög, s AE átlója az oldallal 45°-os szöget ad, következésképpen $NEMA$ négyzet.

Békéssy Szilvia, Budapest,
Nguyen Thanh Do, Berettyóújfalu

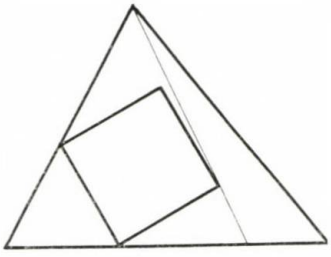
A megoldók száma: 46.

1186. Melyik egységnyi területű háromszögbe írható a legnagyobb területű négyzet?

Megoldás: Azt fogjuk igazolni, hogy az az egységnyi területű háromszög, amelybe a legnagyobb területű négyzet írható, azaz amelyre *a háromszög és a beleírt négyzet területének aránya minimális*, egy olyan nem tompaszögű háromszög, amelynek egyik oldala és az ehhez tartozó magassága egyaránt $\sqrt{2}$. A négyzet területe $\frac{1}{2}$ területegység.



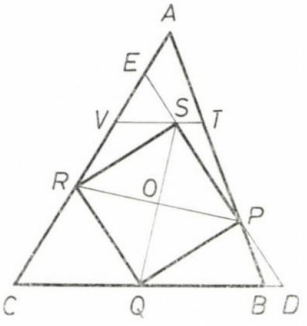
2. ábra



3. ábra

Tekintsünk egy a oldalú négyzetet és írjuk köré a minimális területű háromszöget. A négyzet legalább három csúcsa a háromszög három oldalán lesz, különben párhuzamos eltolással *(2. ábra)* vagy a háromszög „szabad" oldalának egy csúcs körüli elforgatásával *(3. ábra)* kisebb területű háromszöghöz jutunk.

Most azt igazoljuk, hogy a négyzet köré írt háromszög egyik oldala tartalmazza a négyzet egy oldalát. Legyen a $PQRS$ négyzet köré írt ABC háromszög a *4. ábra* szerint. Húzzunk a négyzet S csúcsán át BC oldallal párhuzamost: $TV \| BC$. A négyzet átlóinak felezőpontja legyen O. Feltehetjük, hogy a négyzet PR átlójának végpontjaira $BP \cong PT$ és $CR \cong RV$, hiszen az O pontra illeszkedő BC-vel párhuzamos egyenesnek ugyanazon a partján P és R pont csak úgy lehet, ha $PR \| BC$. A PS egyenes messe BC-t D-ben, AC-t E-ben. Ekkor $PBD\triangle$-et P pontra tükrözve a tükörképet $PST\triangle$ tartalmazza, így a körülírt $ABC\triangle$ területénél kisebb területű $CDE\triangle$-et kapunk, amelynek DE oldalán a négyzetnek két csúcsa van.



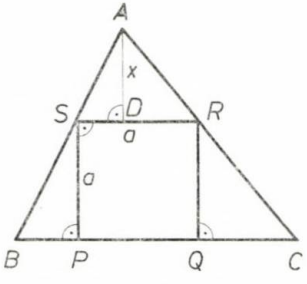
4. ábra

A továbbiakban tehát elég az *5. ábra* szerinti háromszögek közül megkeresni a minimális területűt! Az $ASR\triangle$ és az $ABC\triangle$ hasonlóságából

$$x : a = (x+a) : BC,$$

tehát emiatt

$$2t(ABC\triangle) = (x+a) \cdot BC = \frac{a}{x}(x+a)^2.$$



5. ábra

A számtani és mértani közepek közötti reláció miatt

$$\frac{a}{x}(x+a)^2 \geqq \frac{a}{x} \cdot 2\sqrt{ax} \cdot 2\sqrt{ax} = 4a^2,$$

azaz t minimális és minimuma $2a^2$, ha $x=a$. Ezzel állításunkat beláttuk.

Zsidó-Nagy György, Kolozsvár

A megoldók száma: 34.

1187. Melyik a nagyobb, az

$$1985^{2000}+1988^{2000} \quad \text{vagy az} \quad 1986^{2000}+1987^{2000}?$$

Varga István, Nagyszalonta

Megoldás: Jelölje a feladatbeli első összeget A, a másodikat B és C az $1985^{2000}+1987^{2000}$ összeget. Ezekkel

$$A = 1985^{2000}+(1987+1)^{2000} = C+\sum_{k=1}^{1999}\binom{2000}{k}1987^k+1,$$

$$B = (1985+1)^{2000}+1987^{2000} = C+\sum_{k=1}^{1999}\binom{2000}{k}1985^k+1.$$

Így

$$A-B = \sum_{k=1}^{1999}\binom{2000}{k}(1987^k-1985^k) > 0,$$

hiszen eme összeg minden tagja pozitív.
Ezzel beláttuk: $A>B$.

Csepreginé Ambrus Gabriella, Budapest,
Giczi Margit, Sümeg,
Zelei László, Pécel

Megjegyzés: Ugyanígy igazolhatjuk, hogy minden a pozitív valós számra és k, n pozitív egészre

$$a^n+(a+k+1)^n \geqq (a+2)^n+(a+k-1)^n,$$

ahol az egyenlőség csak $n=1$-re áll.

Bencze Mihály, Brassó,
Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

A megoldók száma: 37.

1188. Legyenek p és r olyan pozitív valós számok, amelyek reciprokainak összege 1. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{3} \leqq \frac{1}{p(p+1)}+\frac{1}{r(r+1)} < \frac{1}{2}!$$

Róka Sándor, Nyíregyháza

Megoldás: Legyen $\frac{1}{p}=a$, $\frac{1}{r}=b$. Mivel $a+b=1$, ezért $a=\frac{1}{2}+x$, $b=\frac{1}{2}-x$ választható, ahol $0 \leqq x < \frac{1}{2}$. Így

$$\frac{1}{p(p+1)}+\frac{1}{r(r+1)} = \frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}+x\right)^2}{\frac{3}{2}+x}+\frac{\left(\frac{1}{2}-x\right)^2}{\frac{3}{2}-x}$$

a bevezetett jelölésekkel. A kifejezés jobb oldala — közös nevezőre hozás és összevonás után —

$$\frac{\frac{3}{4}+x^2}{\frac{9}{4}-x^2} = \frac{3+4x^2}{9-4x^2}$$

alakra hozható. Ennél fogva elég az

$$\frac{1}{3} \leqq \frac{3+4x^2}{9-4x^2} < \frac{1}{2}$$

reláció-láncot igazolni. $0 \leqq x < \frac{1}{2}$ miatt

$$3 \leqq 3+4x^2 < 4$$

és

$$8 < 9-4x^2 \leqq 9,$$

ezért a feladat állítása teljesül.

Tarcsi András, Hajdúszoboszló

A megoldók száma: 43.

1189. Mutassuk meg, hogy az $x^n - x - n = 0$ ($n \geqq 2$ egész) egyenletnek mindig egyetlen gyöke van az [1; 2] intervallumban!

Jelölje x_n ezt a gyököt! Igazoljuk, hogy az (x_n) sorozat konvergens, és határozzuk meg ezt a határértéket!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: Legyen $n \geqq 2$ egész, $f_n: [1; 2] \to \mathbf{R}$,

$$f_n(x) := x^n - x - n.$$

Belátjuk, hogy f_n-nek egyetlen zérushelye van. Ha $n=2$, akkor igaz az állítás, hiszen az $x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet valós gyökei -1 és 2. Ha $n \geqq 3$, akkor $f_n(1) = -n < 0$; $f_n(2) = 2^n - 2 - n > 0$. Mivel f_n szigorúan monoton növő, ezért (felhasználva f_n folytonosságát) a *Bolzano*-tétel szerint egyetlen zérushelye van]1; 2[-ben.

Belátjuk, hogy (x_n) konvergens és $\lim (x_n) = 1$.

$$f_n(\sqrt[n]{n}) = (\sqrt[n]{n})^n - \sqrt[n]{n} - n = n - n - \sqrt[n]{n} = -\sqrt[n]{n} < 0$$

és

$$f_n(\sqrt[n]{n+2}) = (\sqrt[n]{n+2})^n - \sqrt[n]{n+2} - n = n+2-n-\sqrt[n]{n+2} = 2 - \sqrt[n]{n+2} > 0.$$

Felhasználtuk, hogy ha $n \geqq 3$, akkor

$$1 < \sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{n+2} < 2.$$

Ismét a *Bolzano*-tételre és f_n szigorúan monoton voltára hivatkozva:

$$\sqrt[n]{n} < x_n < \sqrt[n]{n+2} \quad (n > 2).$$

Tudjuk, hogy $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n+2} = 1$, ezért az (x_n) is konvergens és $\lim (x_n) = 1$.

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy,
Dr. Marosvári Péter, Budapest

A megoldók száma: 17.

1190. Legyen n pozitív egész, és H az egész számoknak olyan halmaza, hogy minden eleme vagy két H-beli elem összege, vagy egy H-beli elem kétszerese, továbbá minden olyan legfeljebb n-tagú összeg, amelynek valamennyi eleme H-ból való, nem egyenlő nullával (egytagú összeget is megengedhetünk)! Bizonyítsuk be, hogy H-nak legalább $2n+2$ eleme van!

OKTV. 1988. II. forduló

Megoldás; Elegendő véges halmazokkal foglalkoznunk. Mivel minden olyan legfeljebb n tagú összeg, amelynek valamennyi eleme H-ból való (az egytagú összeget is megengedve) nem egyenlő nullával, ezért a $0 \notin H$. H tartalmaz pozitív és negatív elemeket is, hiszen ha csak pozitív elemekből állna, akkor ezek legkisebbikét nem tudnánk két H-beli elem összegeként felírni. Így H előállítható két nem üres diszjunkt halmaz egyesítéseként. Jelölje H^+ a H halmaz pozitív elemeit, H^- elemeit! Tetszőleges $h_i \in H^+$-ra

(1) $$h_i = h_{j1} + k_{j1},$$

ahol a jobb oldalnak legalább az egyik eleme, mondjuk h_{j1} pozitív (és $h_i \neq h_{j1}$).

(1)-ben h_{j1} helyére (1) miatt $h_{j1}=h_{j2}+k_{j2}$ majd $h_{j2}=h_{j3}+k_{j3}$ stb. írható. h_i-k legyenek mind pozitívak, $h_{ji}\neq h_{ji+1}$. Mivel H^+ véges, a $h_{ji}-$k valamelyike szükségszerűen h_i-vel egyenlő. Legyen ez h_{jr} (s felsorolásunkban az első). Ekkor (1)-ből

$$h_i = h_{j1}+k_{j1} = h_{j2}+k_{j1}+k_{j2} = \ldots = h_{jr}+k_{j1}+k_{j2}+\ldots+k_{jr},$$

vagyis

$$0 = k_{j1}+k_{j2}+\ldots+k_{jr}. \tag{2}$$

$r>n$, mert a (2)-beli r tagú összeg elemei H-ból valók. A $h_{ij}-$k mindegyike különböző, tehát H^+-nak legalább $n+1$ eleme van.

Hasonlóan látható be, hogy H^- elemeinek száma is legalább $n+1$, így valóban H-nak legalább $2n+2$ eleme van. (Léteznek is a feladat feltételeit kielégítő véges halmazok, pl. $n=1$-re a

$$H = \{-2; -1; 1; 2\}$$

vagy ezek $m(\neq 0)$-szorosából álló négyelemű H.)

Csorba Ferenc, Győr
Kondor László, Dunaújváros

Megjegyzések: (1) $n=2$-re az összes 6 elemű H halmaz csak az $1, 2, 4, -3, -6, -5$ elemekből, vagy ezek egész többszöröseiből állhat.
$n=3$-ra a $H=m\cdot\{1, 2, 4, 8, -7, -14, -13, -11\}$ az „egyetlen" 8 elemű halmaz, amely a feltételeknek eleget tesz ($m\neq 0$ egész).
$n=4$-re már háromféle H konstruálható:

$$H := m\cdot\{1, 2, 4, 8, 16, -30, -29, -27, -23, -15\},$$

$$H := m\cdot\{3, 6, 12, 24, 17, -28, -25, -19, -7, -14\}$$

és

$$H := m\cdot\{5, 10, 20, 9, 18, -26, -21, -11, -22, -13\}.$$

(2) Ha a feladat feltételeinek megfelelő H halmazt akarunk konstruálni (bármely n pozitív egészre), úgy válasszunk olyan p_0 pozitív egészet, amelyre

$$p_0 < 2^{n+1}-1 \quad \text{és} \quad (p_0, 2^{n+1}-1) = 1.$$

Az így választott p_0-hoz definiáljuk p_k-t úgy, hogy

$$p_k \equiv 2^k p_0 \bmod (2^{n+1}-1), \quad 0 \leqq k \leqq n$$

és

$$0 < p_k < 2^{n+1}-1$$

legyen. Ezekkel $H^+ := \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ és $H^- := \{q_k | q_k = p_k+1-2^{n+1}\}$. Így ha $p_k<2^n$, akkor $p_{k+1}=2p_k$ és

$$q_{k+1} = p_{k+1}+1-2^{n+1} = 2p_k-(2^{n+1}-1) = p_k+q_k;$$

ha viszont $p_k\geqq 2^n$, úgy

$$p_{k+1} = 2p_k-(2^{n+1}-1) = p_k+q_k$$

és

$$q_{k+1} = p_{k+1}-(2^{n+1}-1) = 2p_k-2(2^{n+1}-1) = 2q_k.$$

Legyen k darab H-beli elem összege 0:

$$x_1+x_2+\ldots+x_k = 0.$$

Ezt az egyenletet tekinthetjük $\bmod (2^{n+1}-1)$ vett egyenletnek is. Osszuk el $\frac{1}{p_0}$-lal. Így minden elem 2^i alakú, ahol $0\leqq i\leqq n$. Nyilvánvaló, hogy $k\geqq n+1$ kell legyen, ha a $\bmod (2^{n+1}-1)$ vett összeg 0.

A megoldók száma: 3.

Imrecze Zoltánné: *Aki mer, az nyer!*

A könyv azoknak a tapasztalatoknak az eredménye, amelyeket felmérések során, de legfőképpen az „Aki mer, az nyer!" (ma már Körmönfontoló) című Tv-vetélkedősorozat folyamán szereztünk. A versenyfeladatokból és azokon kívül, azokhoz hasonló tipusú feladatokból állítottuk össze a gyüjteményt. Néhol megjegyzést fűztünk olyan feladatokhoz, amelyek megoldásában a versenyzők nem remekeltek. Próbáltuk ennek okát is megfejteni — írja a könyv előszavában többek között a szerző (R.sz.: 81 353). (Kapható, megrendelhető Medicina könyvesboltban, Bp. V. Akadémia u. 21.

A megoldók névsora (1185—1190.)

Bagi Gábor, Barcs (1185—1188.); Bagó Istvánné, Győrújbarát (1187); Bálint Vilmosné, Hódmezővásárhely (1185—1188.); Békéssy Szilvia, Budapest (1185., 1187., 1188.); Bencze Mihály, Brassó (1185—1188. 2—2 mód, 1189.); Bigus Imre, Sárospatak (1185—1188.); Bíró Bálint, Eger (1185—1188.); Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy (1185., 1186., 1187. 2 mód, 1188., 1189.); Boda Miklós, Pécs (1185., 1188.); Csepreginé Ambrus Gabriella, Budapest (1185—1188.); Csorba Ferenc, Győr (1185—1188., 1190.); Giczi Margit, Sümeg (1185—1188.); Hajna János, Pécs (1185—1188.); Hárspatakiné Dékány Veronika, Budapest (1185. 2 mód, 1186., 1187.); Horváth Géza, Zselíz (1185.); Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (1185—1190.); Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép (1185., 1187., 1188.); Kondor László, Dunaújváros (1185., 1186., 1188., 1190.); Kosztolányi József, Szeged (1185—1189.); Kovács Gabriella, Nagybánya (1185—1189.); Kovácsné Gajdács Ibolya, Budapest (1185—1188.); Dr. Marosvári Péter, Budapest (1185. 2 mód, 1186—1189.); Matekovics Mihály, Arad (1185., 1188.); Merényi Imre, Börvely (1187., 1188.); Mészáros József, Galánta (1185—1188.); Munkácsy István, Győr (1185—1188.); Náfrádi Ferenc, Győr (1185., 1186.); Nguyen Thanh Do, Berettyóújfalu (1185—1187.); Nyírő László, Mezőkövesd (1185., 1186., 1188.); Petkes Gergely, Nagykároly (1185. 2 mód, 1186., 1187—1188. 2—2 mód, 1189.); Rakonczai György, Budapest (1185—1189.); Retkes Zoltán, Kiskunfélegyháza (1185., 1187—1189.); Rischákné Kishalmi Rózsa, Hódmezővásárhely (1185., 1186., 1188., 1189.); Sallai István, Zilah (1185., 1186., 1188.); Sebestyén László, Budapest (1185., 1186., 1188.); Simon József, Csíkszereda (1185—1188.); Számadó László, Budapest (1185., 1187. 2 mód, 1188.); Szűcs Zoltán, Budapest (1185—1189.); Tarcsi András, Hajdúszoboszló (1187., 1188.); Tóth György, Szolnok (1185.); Tóth László, Szatmár (1185., 1187., 1188. 2 mód, 1189.); Tóth Sándor, Sárospatak (1185. 2 mód, 1186—1189.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (1185., 1186., 1187—1189. 2—2 mód); Udvari Tibor, Baja (1185—1188.); Varga István, Nagyszalonta—Békéscsaba (1185. 3 mód, 1186., 1187—1188. 3—3 mód, 1189.); Vincze István, Szeged (1185—1188.); Zalán Péterné, Budapest (1185.); Zelei László, Pécel (1187., 1188.); Zsidó-Nagy György, Kolozsvár (1185—1189.).

DR. SCHARNITZKY VIKTOR
főiskolai tanár
Budapest

Új könyvek

ÁBRAHÁM ISTVÁN—BEDŐ LÁSZLÓ—CZÉTÉNYI CSABA—IFJ. FRIGYESI MIKLÓS—JUHÁSZ ATTILA—KORÁNYI ERZSÉBET: *Matematika a felvételi vizsgára készülők részére* (4. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 584 oldal, 95,— Ft.

ANDRÁSFAI BÉLA: *Versenymatek gyerekeknek* (2. kiadás), Általános iskolai szakköri füzet, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 168 oldal, 27,— Ft.

ARATÓ PÉTER: *Logikai rendszerek tervezése* (2. kiadás), Egyetemi tankönyv, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 475 oldal, 52,— Ft.

BÁLINTNÉ SZENDREI MÁRIA—CZÉDLI GÁBOR—SZENDREI ÁGNES: *Absztrakt algebrai feladatok* (2. javított kiadás), Egyetemi segédkönyv, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 504 oldal, 41,— Ft.

BOJTÁR IMRE—MOLNÁR GYÖRGY—NAGY TAMÁS: *A végeselem-módszer alkalmazása síkbeli feladatokra*, Budapest, 1988, Műszaki Könyvkiadó, 142 oldal, 45,— Ft.

BURRIS, S.—SANKAPPANAVAR, H. P.: *Bevezetés az univerzális algebrába*, Egyetemi segédkönyv, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 347 oldal, 46,— Ft.

CERVENAKNÉ NEMÉNYI ESZTER (szerk.): *Kézikönyv a matematika 1. osztályos anyagának tanításához* (5. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 424 oldal, 58,— Ft.

CSÁSZÁR ÁKOS: *Valós analízis I—II*, (2. kiadás), Egyetemi tankönyv, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 521, 688 oldal, 56, 70,— Ft.

DÉVÉNYI DEZSŐ—GULYÁS OTTÓ: *Matematikai statisztikai módszerek a meteorológiában*, Egyetemi tankönyv, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 443 oldal, 49,— Ft.

DÖMÖTÖR FERENC—HUSZTHY LÁSZLÓ—VINCZE ENDRE: *Valószínűségszámítási példatár* (6. kiadás), Miskolc, 1988, Nehézipari Műszaki Egyetem, 33 oldal, ár nélkül.

DUKÁTI FERENC: *Termékek matematikai statisztikai ellenőrzése*, Budapest, 1988, Budapesti Műszaki Egyetem Mérnök Továbbképző Intézet, 159 oldal, 120,— Ft.

FORGÓ, F.: *Nonconvex programming*, Budapest, 1988, Akadémiai Kiadó, 187 oldal, ár nélkül.

GÁDOR ENDRÉNÉ—GYAPJAS FERENCNÉ—HÁRSPATAKINÉ DÉKÁNY VERONIKA—DR. KORÁNYI ERZSÉBET—PÁLMAI LÓRÁNT—POGÁTS FERENC—DR. REIMAN

ISTVÁN—DR. SCHARNITZKY VIKTOR: *összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából* (5. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 478 oldal, 58,— Ft.

GERŐCS LÁSZLÓ: *A Fibonacci-sorozat általánosítása,* Középiskolai szakköri füzet, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 147 oldal, 32,— Ft.

GROSSMANN, W.—MOGYORÓDI, J.—VINCZE, I.—WERTZ, W. (editors): *Probability theory and mathematical statistics with applications,* Proceedings of the 5th Pannonian Symposium on Mathematical Statistics Visegrád, Hungary, 20—24 May, 1985, Budapest, 1988, Akadémiai Kiadó, 456 oldal, ár nélkül.

HAJÓS GYÖRGY—NEUKOMM GYULA—SURÁNYI JÁNOS: *Matematikai versenytételek II. rész* (3. átdolgozott és kibővített kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 228 oldal, 46,— Ft.

IMRECZE ZOLTÁNNÉ—REIMAN INSTVÁN—URBÁN JÁNOS: *Fejtörő feladatok felsősöknek, Általános iskolai tanulók számára* (2. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 312 oldal, 48,— Ft.

KIRILLOV, A. A.—GVISIANI, A. D.: *Feladatok a funkcionálanalízis köréből* (2. kiadás), Egyetemi segédkönyv, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 391 oldal, 51,— Ft.

KLEIN SÁNDOR: *The effects of modern mathematics,* Budapest, 1988, Akadémiai Kiadó, 550,— Ft,

KOSTER, C. H. A.: *Programozás felülnézetben,* Budapest, 1988, Műszaki Könyvkiadó, 267 oldal. 150,— Ft.

LUKÁCS OTTÓ: *Gyermekmatek* (2. kiadás), Utazások matematikaországban, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 96 oldal, 24,— Ft.

NOVÁK LÁSZLÓNÉ: *Útmutató az általános iskolai matematika tananyagának korrekciójához, 5—8. osztály,* Budapest, 1987, OPI, 49 oldal, ár nélkül.

NOVÁK LÁSZLÓNÉ (szerk.): *Kézikönyv a matematika 2. osztályos anyagának tanításához* (5. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 287 oldal, 46,— Ft.

NOVÁK LÁSZLÓNÉ (szerk.): *Kézikönyv a matematika 7. osztályos anyagának tanításához* (3. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 436 oldal, 65,— Ft.

PAPERT, SEYMOUR: *Észrengés, A gyermeki gondolkodás titkos útjai,* Budapest, 1988, Számítástechnika-alkalmazási Vállalat, 166 oldal, 160,— Ft.

PETI ÉVA (szerk.): *Gond? Oldd meg!,* Matematika és fizika feladatmegoldó verseny általános iskolásoknak, Kecskemét, 1988, Bács-Kiskun Megyei Pedagógiai Intézet, ár nélkül.

POPPER GYÖRGY: *Bevezetés a végeselem-módszer matematikai elméletébe,* Budapest, 1988, Budapesti Műszaki Egyetem Mérnök Továbbképző Intézet, 142 oldal, 150,— Ft.

SCHARNITZKY VIKTOR: *Válogatott egyetemi felvételi feladatok matematikából (1966—1985),* Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 553 oldal, 112,— Ft.

SMULLYAN, RAYMOND: *Mi a címe ennek a könyvnek? Drakula rejtélye és más logikai feladványok,* Budapest, 1988, Műszaki Könyvkiadó, 247 oldal, 69,— Ft.

STROMMER GYULA: *Geometria,* Egyetemi tankönyv, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 722 oldal, 75,— Ft.

SZÁSZ GÁBOR: *Matematika I.,* Egyetemi tankönyv, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 437 oldal, 48,— Ft.

SZABÓ, L.—SZENDREI, Á. (editors): *Lectures in universal algebra,* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 43, János Bolyai Mathematical Society and Elsevier Science Publishers B. V., Budapest—Amsterdam—New York, 1986, 655 oldal, ár nélkül.

SZERÉNYI TIBOR: *Analizis* (4. kiadás), Tanárképző főiskolai tankönyv, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 578 oldal, 61,— Ft.

SZTRÓKAYNÉ FÖLDVÁRI VERA: *Mátrixok az általános iskolai tanulók számára* (3. kiadás), Általános iskolai szakköri füzet, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 125 oldal, 28,— Ft.

SZTRÓKAYNÉ FÖLDVÁRI VERA (szerk.): *Kézikönyv a matematika 8. osztályos anyagának tanításához* (3. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 467 oldal, 68,— Ft.

TATÁR ISTVÁN: *Feladatok az úttörő-matematikusok vetélkedőin 2. kötet,* Általános iskolai szakköri füzet, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 330 oldal, 50,— Ft.

T. TÓTH SÁNDOR—SZABÓ ÁRPÁD: *Matematikai műveltségünk keretei. Középkor és reneszánsz,* Budapest, 1988, Gondolat, 209 oldal, 62,— Ft.

ÚJVÁRI ISTVÁN: *Felkészülés és felzárkózás matematikából az általános és középiskolai tanulók számára* (5. kiadás), Általános iskolai szakköri füzet, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 158 oldal, 32,— Ft.

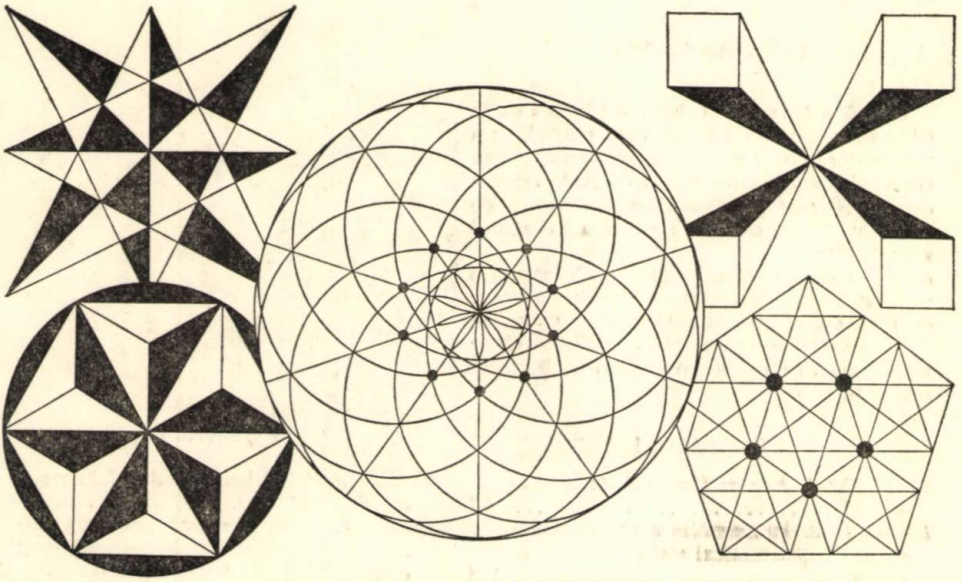
ÚJVÁRI ISTVÁN: *Egyedül készülök a felvételire! Összefoglaló matematikából* (2. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 380 oldal, 56,— Ft.

VILENKIN, N. JA.: *A végtelen kutatása,* Középiskolai szakköri füzet, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 227 oldal, 40,— Ft.

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata

VESZPRÉM MEGYEI ÁLLAMI KÖNYVTÁR



1989. XXXVI. évfolyam 4 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
URBÁN JÁNOS

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:
ÁCS PÁL, ELŐD ISTVÁNNÉ, HÓDI ENDRE, DR. KOLLER LÁSZLÓNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, LAJOS JÓZSEFNÉ, NÉMETHY KATALIN, PÁLMAY LÓRÁNT, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZENDREI JULIANNA, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1087 Budapest, Berzsenyi utca 6.
Telefon: 1141-009

89-1691 — Szegedi Nyomda
F. v.: Surányi Tibor igazgató
A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 42,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 7,— Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy a közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő adatokat is:
a) személyi számukat, *b)* asszonyok leánykori nevüket, *c)* lakáscímüket — irányítószámmal, *d)* foglalkozásukat (beosztásukat), *e)* munkahelyük pontos megnevezését, (nyugdíjasok törzsszámukat), *f)* munkahelyük címét — irányítószámmal.

TARTALOM

Török Turul: Angliai élmények és tapasztalatok 97
Lukács Ottó: Hozzászólás a valószínűségszámítás matematikai statisztika oktatásához 105
Ambrus András; A matematikaoktatás jelenkori problémái és perspektivái a Szovjetunióban, Angliában és az USA-ban (I. rész) 117
FELADATOK 122
ÚJKÖNYVEK ..... VI.

СОДЕРЖАНИЕ

Тэрэк Турул: Опыты и переживания из Англии 97
Лукач Отто: Высказывание к обучению теории вероятности и математической статистики 105
Амбруш Андраш: Сегодняшние проблемы и перспективы обучения математики в СССР, в Англии и США (том I.) 117
ЗАДАЧИ 122
НОВЫЕ КНИГИ ..... IV.

INHALT

Török, Turul: Erlebnisse und Erfahrungen aus England 97
Lukács, Ottó: Diskussionsbeitrag zum Unterricht der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Mathematischer Statistik 105
Ambrus, András: Gegenwärtige Probleme und Perspektiven des Mathematikunterrichts in der Sowjetunion, in England und in den Vereinigteu Staaten (I. Tell) 117
AUFGABEN I22
NEUE BÜCHER ..... IV.

TÖRÖK TURUL
főmunkatárs
Budapest, KFKI

Angliai élmények és tapasztalatok

Két éve vagyok laza kapcsolatban nottinghami egyetemen működő Shell Centre néhány munkatársával. Az ICME—6 alkalmával a látogatók megtekinthették lenyűgöző kiállításukat, sőt a tv is jó tízperces ízelítőt adott tevékenységükből, elképzeléseikről. Nagy megtiszteltetésnek és nem kis szerencsének tartom, hogy 1988 végén három hetet tölthettem náluk, és ismerkedhettem az ottani matematikaoktatás legfrissebb tanulságaival. Ezekből szeretnék egy kis kóstolót adni.

Egy kis „tényszerű" kitérő. 12 órát látogattam a frieslandi (Nottingham elővárosa) iskolában. Beszélgettem tizenegy középiskolai tanárral, és szinte állandóan együtt voltam a Shell Centre kutatóival. Egy napot töltöttem Southamptonban, ahol Geoffrey Howson vendégeként a 16—19 éves korosztály matematikai oktatásából kaptam ízelítőt. Utólag itthon még hat Angliából érkezett (nyelv- és matematikaszakos) tanárral való beszélgetésben pontosítottam a megfigyeléseimet. Félek, még így is van pontatlanság bőven, amiért elnézést kérek.

Angliában — mint szinte minden területen — az oktatásban is igazi demokrácia van. Egy angliai tanár számára ez azt jelenti, hogy bármilyen elképzelését, ötletét abszolút szabadon megvalósíthatja, *esetleg* tantárgyi igazgatójával kell megbeszélnie. Ebből azonnal következik, hogy a szigetország oktatásában szinte minden lehetséges. Az egyetlen „korlát" a pedagógus lelkiismerete. Egy látogató számára ugyanakkor ez a demokrácia azzal jár, hogy nem könnyű kiismernie az oktatás miként jét. Ha úgy gondolja, hogy ez valamennyire is sikerült, akkor csak olyan kijelentéseket tehet, miszerint „az általam látogatott iskolá(k)ban...", „a *legtöbb* tanár...", „egy *átlagos* iskola...". Tehát az alábbiak kizárólag így értendők és csak az állami oktatásra vonatkoznak, elvégre a magán (egyházi) iskolák még kevésbé egységesek.

Az oktatás szervezete

A gyerekek ötéves korban lépnek be az oktatásba, hiszen a „primary" (elemi) iskola első szakasza 5 éves kortól kezdve két éven át tart. Ezalatt olvasni, írni (csak szavakat!) tanulnak, némi számolással. Sokkal inkább a *szoktatáson* van a hangsúly, mintsem az ismeretszerzésen. Ezután a „junior" korszak következik, további négy éven át, ahol változatlanul játékosan csipegetik a gyerekek a tudást. Itt (lényegében) mindenki ugyanazt tanulja. A hat év (5—11) alatt főleg az írást, olvasást, számolást (maximum kétjegyű számokkal) gyakorolják. Matematikából ilyesmik szerepelnek — a mi fogalmaink szerint elég felszínesen: törtek, átlag, hisztogram, grafikon, megfeleltetés, koordináták stb. Mindez nagyon sok játékkal, rengeteg ismétléssel történik a középiskolás tanárok teljes megelégedésére! Minthogy Angliában ismeretlen fogalom a bukás, hat év után mindenki *automatikusan* továbbkerül a következő (középső) fokozatba.

11—16 éves kor között járnak középiskolába (grammar, comprehensive). Itt már meg kell különböztetni „jobb" és kevésbé jobb iskolákat, bár az ottaniak szerint nincs nagy eltérés. A középiskola 2+3 vagy 3+2 szakaszokra oszlik. Első része nagyon hasonlít az általánosra, játékosságában, gyakori ismétléseivel. Szembetűnő, hogy az anyag 2—3 órás blokkokra tagolódik, ami rengeteg ismétlési lehetőséget jelent, és kellemesen változatos a tanulóknak. A rövid idő alatt úgy tűnt, sokkal kevésbé riogatják a gyere-

keket az „egymásra épülő" anyagrészekkel, illetve a végleges lemaradás lehetőségével! A középiskola fele táján egy vizsga következik — (információim szerint) az *első* megmérettetés egy angol gyerek életében! Ennek eredményeként képességeik alapján 2—3 csoportba sorolják a tanulókat. A csoportok között létezik „vándorlás", de ritka. Bukás természetesen itt sincs, és ha 100%-nak tekintjük a legjobb 2—3 gyerek teljesítményét, akkor 50—70% a legrosszabbak tudása — mondták többen is!

16 éves korukban következik az érettségi vizsga (0-level vagy GCSE-normál vizsga). Matematikából ennek 35%-át egy teszt jelenti, 35% egy, a mi írásbelinknél kicsit könnyebb dolgozat — 4 kötelező és 4 (8-ból) választható feladattal. A maradék 30% *három* házi dolgozatból adódik. Ezek egyike egy általános vizsgálódás, 10—12 lehetőség közül választható, és szinte semmilyen előismeret nem szükséges hozzá, csak józan ész. A másik két dolgozat több mint húsz probléma közül kerülhet ki, és jobban kötődik a matematika egyetlen ágához (pl. geometria, algebra, alkalmazások a fizikában, függvények, valószínűségszámítás stb.). Ezek alapján a tanulók (a megfelelő korosztály 100%-a!) 7—8 szintbe soroltatnak, ami nemcsak a továbbtanulásnál számít, hanem az esetleges elhelyezkedést is *alapvetően* befolyásolja. A gyerekek életében ez a második számonkérés.

16 éves kor után a kép összetettebb, ugyanis sok iskola (épület)ben nincs is osztály idősebbek számára, pedig kb. 30—40% még folytatja a tanulást: maradnak, college-ba mennek stb. Az érettségi utáni oktatás inkább tanfolyamrendszerűnek mondható: mindenki maga válogatja tantárgyait, általában a távolabbi célnak, az egyetemnek megfelelően. Például a matematika mellé még lehet statisztikát (ebben a valószínűségszámítás is benne van) vagy „mechanikai matematikát" (esetleg mindkettőt!) felvenni. Ennek végén van az „A-level" (haladó szintű) vizsga, ami részben egyetemi felvételi, másrészt szintén meghatározza az elhelyezkedést.

Az oktatás körülményei

— Óraszám: nagyjából megegyezik az ittenivel! Ahol voltam, ott heti 21—24 *hatvanperces* óra a fejadag, és a munkaközösség vezetőjének is 19 órája volt, sőt az igazgatónak is valami hasonló. Az órák hossza 35—75 perc között változik iskolánként, és a tanítás délelőtt és délután *is* folyik, általában 3/4 9—15 óráig természetesen ebédszünettel. Valamennyi kinti ismerősöm (a középiskolai pedagógusok), *csak* matematikát oktatott. Sőt többen főleg kisebbekhez, mások inkább nagyobbakhoz, megint mások elsősorban geometriára vagy esetleg alkalmazáskor mentek be! Volt, hogy az óra előtt jelenlétemben beszélték meg, ki hova menjen.

— A tanulócsoportok létszámát nem könnyű megfigyelni, állandóan (még óra közben is!) változik. 12—22 gyereket láttam egyszerre egy teremben. 30 főnél nagyobb osztályt nem tudnak elképzelni vendéglátóim, és szerintük már a 25 gyerek is közel elviselhetetlen.

— A középiskolában 6—8 tantárgy van. Friesland-en matematika, angol, francia, természettudomány (=fizika+kémia+biológia), humán (=történelem+földrajz), művészet (=rajz+színjátszás+zene+torna+játék) és önképzés. A megfelelő óraszámok a középiskola két felében: 4—3, 3—3, 3—3, 3—3, 3—3, 4—4, 1—2 — bizony alig változik! Persze bármiből lehet „fakultálni": 13—15 éves korban nagyobb óraszámban tanulni.

— A tanév három harmadból áll, mindegyik végén egyhetes szünettel. Karácsonykor 10 napig, húsvétkor két hétig nincs tanítás. A nyári vakáció viszont csak kb. hathetes.

— Az általam látogatott iskola (Friesland school) éves költségvetése kb. 20 000 font, ebből a matematika-munkaközösség 2700-at kap. Ez utóbbi összeg

kb. 4000 ebédet fedez a gyerekek és tanárok közös menzáján, illetve ebből közel százezer oldalnyit lehet sokszorosítani. Ezt az összeget főleg fénymásolásra, könyvek (ismeretterjesztő-tudományos) vásárlására, és fogyó anyagok pótlására fordítják. Szoftvereket inkább kapnak, mint vesznek.

— Ismerőseim szerint a 16 éves gyerekek 100%-a próbálkozik az érettségivel, és kétharmaduk normál vizsgát tesz. A többi vagy könnyített vizsgával kísérletezik, vagy eredménytelen marad. A korosztály egyharmada ér el kifejezetten jó eredményt (ami „továbbtanulásra" jogosít), és körülbelül 10—15% próbálkozik egyetemmel. Ezek nagyobbik fele valóban jár is egyetemre. Nem meglepő, hogy ennek is több fokozata, változata van: 3—5—7 évet lehet ott „rendeltetésszerűen" eltölteni...

Mit tanítanak?

— A rengeteg apró fejezetből álló anyagot nem könnyű pontosan leírni. *Egyrészt* amit láttam: a matematikának kb. fele az úgynevezett „általános vizsgálódás", ami olyan feladatok megoldását, vizsgálatát jelenti, amihez semmilyen előismeret nem kell, „csak" logikus gondolkodás. Szélsőséges példaként menetrendben vagy telefonkönyvben kell ügyesen eligazodni. Sokkal kevesebb a trigonometria (sinus-, cosinus-tételeket csak megemlítik!), a koordináta-geometria és általában a geometria is kevesebb. Utóbbi főleg játékosan, a bizonyításnál szinte „fontosabb" az esztétika! Függvényekről sokat van szó, de elsősorban magyarázzák a grafikonokat: mit jelenthet egy-egy szakasz, miért „törik" a görbe, miért ingadozik stb. *Másrészt* az érettségi feladatokból kitűnik a következő: 2×2-es mátrixokat sűrűn invertálnak, és minden geometriai transzformációnak tanulják a mátrixát is! Szerepelnek a valószínűségszámítás elemei, illetve egyszerűbb kombinatorikai leszámolások. Elképzelhető némi modern algebra (pl. csoport) vagy egy gráf incidenciamátrixa is. Régebben volt logarléc, most gondolom kalkulátor van helyette: mindenütt hangsúlyozzák, hogy elég annak a „pontossága". Ugyanakkor alig van trigonometria, egyenletmegoldás.

— A matematikaoktatás bármilyen szintű követelményrendszere kiemeli, hogy egyformán fontos olvasni a matematikáról és hallás után megérteni azt; illetve írni és beszélni róla. Ezt veszik a legszigorúbban — talán komolyabban, mint a tárgyi tudást. Ennek eredménye, hogy pl. az érettségi házi dolgozatok 10—40 oldalasak, és stílusuk szerintem helyenként felveszi a versenyt némely hazai kandidátusi disszertációval. Nekem úgy tűnt, ha egy angol gyerek állít valamit, azt általában *érvekkel* alá is tudja támasztani, sőt ezeket az érveket képes meg is fogalmazni.

Amikor megérkeztem, bevezetőként tanterveket szerettem volna böngészni. Erőszakoskodásomra mutattak egy kb. két méteres polcot, hogy „az alsó két sor az mind tematika". Viccesnek találtam azt is, amikor beszélgetve a 10 éve készülő „nemzeti tanterv" szülőivel, nevetve mondták, hogy „az soha nem fog elkészülni, meg minek is..."

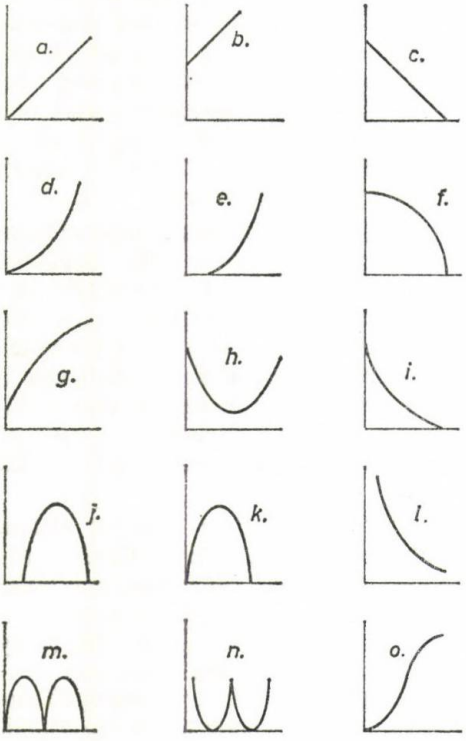
— Örömmel láttam rengeteg logikai játékot a feladatok között. Ennél is feltűnőbb, hogy *minden* feladat egy teljes kis történet, ami motiválja a tanulót: ilyen problémával ő maga is találkozhat (vagy már találkozott is!). Ezekután nem meglepő, hogy a válasz is egy összefüggő történet pl. „Nem lehet a kertet bekeríteni, mert a rendelkezésre álló drót rövidebb, mint a kert kerülete. Még 24 m hosszú kerítésre lenne szükség, vagy beszéljük rá a(z egyik) szomszédot, hogy a közös határunkról (feléről) ő gondoskodjon."

— A számítógépről alig esett szó, ők inkább használják. Többször igyekeztem szóba hozni, de általában annyi eredménnyel, mintha nálunk valaki a kréta márkájáról érdeklődne. Friesland-ban 5 éve oktattak BASIC-et, most már fe-

lesleges, hiszen minden 10—11 éves gyerek tökéletesen ismeri a programozás alapjait. Kicsit felháborodtak a kérdésemen, hogy honnan ez az ismeret: egyszerűen van! — mondták. 2—5 óra ismeretterjesztés van évente, különböző tárgyak óráin. Az általam látott 12 matematikaórából kettőn volt főszereplő a komputer, további kettőn „előfordult". Többször láttam, hogy egy gyerek odapattant a géphez, és szövegszerkesztővel letisztázott valamit. Minthogy a feladatokat kis csoportban oldják meg, gyakori, hogy ilyenkor egyik tanuló diktál a másiknak.

Az ún. *GEOMETRIAI SZERKESZTÉSEKKEL* többször tíz órát töltenek. A borítón láthatóhoz hasonló ábrák százait kell reprodukálni és színezni — vonalzó, körző és *szögmérő* segítségével. Nem próbálgatnak, hanem nagyon tudatosan keresik a nevezetes pontokat, vonalakat — bizonyítás nélkül. A „mérce": jól nézzen ki.

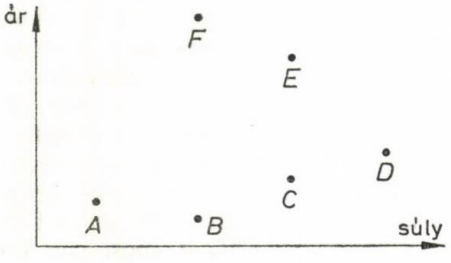
FÜGGVÉNYEKKEL közel ötven órát foglalkoznak. Ebből is egy kis ízelítő:



1. Az alábbi szituációk, történések melyik függvénygörbével hozhatók kapcsolatba? Ha nem találsz megfelelőt, rajzolj szerinted jót!

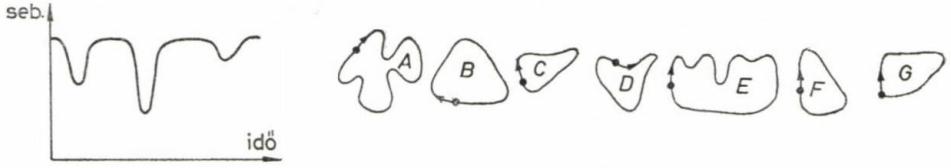
a) Az árak most lassabban növekednek, mint az utóbbi öt évben.
b) Szeretem a hideg vagy meleg tejet, de langyosat inkább nem iszom!
c) Minél kisebbek a ládák, annál több fér belőlük a teherautóba.
d) A koncert végén csend volt. Valaki tapsolni kezdett, amit átvett a környezete, majd egyre többen.
e) Ha a mozijegyek ára túl alacsony, tönkremegy a tulajdonos. Ha viszont nagyon emel, kevesen mennek hozzá.
f) Egy zsák krumpli ára hogyan függ a tömegétől?
g) Egy léggömböt lassan felfújunk. Hogyan változik az átmérője?
h) Egy futóverseny időtartama hogyan függ a versenyszám hosszától?
i) Hintázó kislány sebessége.
j) Földön pattogó labda sebessége.

2. Hat csomag cukor árát és súlyát mutatja a grafikon. Minden pont egy-egy konkrét zacskóra vonatkozik.



a) Melyik a legnehezebb csomag?
b) Melyik a legolcsóbb?
c) Vannak-e azonos súlyú zacskók?
d) Látsz-e azonos árúakat?
e) *B* és *C* melyike éri meg jobban az árát?
f) Van-e két egyformán jó vétel?
g) *F* és *C* közül melyiket érdemesebb venni, és miből gondolod ezt?

3. Az alábbi versenypályák melyikén készült a grafikon?



Az alábbi „rövid válaszos" (teszt) kérdések a 16 éves korban esedékes *ÉRETTSÉGI* dolgozat kb. egy harmadát (35%) tették ki 1978-ban. A válaszokat a kapott ún. „válaszlapok" megfelelő rovataiba kell beírni, illetve a tesztnél a megfelelő betű-(ke)t kell megjelölni — *indoklás nélkül.* 150 percig lehet dolgozni a 18+15 feladaton.

A rész (50 pont)

1. Kalkulátorral 209,18482 cm²-nek adódott egy 8,16 cm sugarú kör területe. Kerekítsd ezt megfelelő számú jegyre!

2. Számítsd ki két értékes jegy pontossággal: $\dfrac{2{,}60 \cdot 3{,}25}{1{,}96}$.

3. Írd fel az alábbi hálózat útmátrixát:

4. i. $\dfrac{4700 \cdot 9{,}3}{6{,}2}$ és ii. $\dfrac{1}{2 \cdot 10^4}$ értékeket $a \cdot 10^n$ normálalakba írjuk. Mi lesz n?

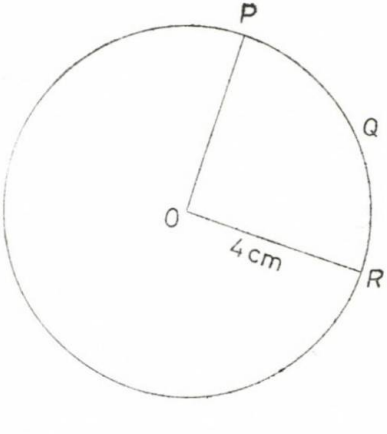
5. Oldjuk meg az $3 \cdot (5-3x)=4+x$ egyenletet!

6. Ha $h \geqq k+5$ és $k-6 \geqq 0$, mi lesz h legkisebb értéke?

7. *O* egy 4 cm sugarú kör középpontja. A *POR* szög 90 fokos. Fejezd ki π segítségével

a) Az *OPQR* körcikk,

b) A *PQR* körszelet területét!



8. Az **A**, **B** és **C** testek alakja pontosan egyforma.

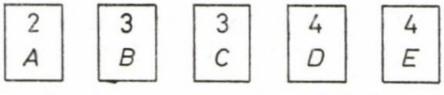
i. Ha **A** kétszer hosszabb **B**-nél, mi a térfogatuk aránya?

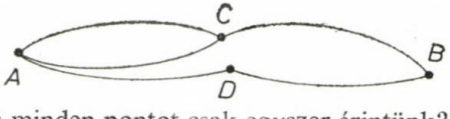
ii. Ha **A** felszíne 16-szorosa **C**-énak, mi a hosszuk aránya?

9. *ABCDEFGHIJ* egy szabályos tízszög, középpontja *O*. Számold ki i. Az *AOD* szöget, ii. Az *AJB* szöget!

10. Az 1, 2, 0, 3, −1, *p*, *q*, 5, −3, ... sorozatnak egy egyszerű képzési szabálya van. Mi lehet *p* és *q* értéke?

11. A kártyák számokkal és betűkkel vannak megjelölve. Mi az öt kártyán a számok várható értéke? Véletlenül húzva egy kártyát, mi a hármas szám húzásának valószínűsége?



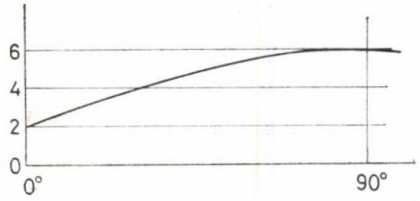


12. Hány út vezet *A* pontból *B* pontba, ha minden pontot csak egyszer érintünk?

13. Tudjuk, hogy $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

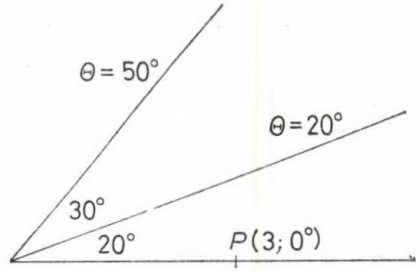
Fejezzük ki a $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ vektort $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alakban!

14. A grafikon az $y = A \sin x^0 + k$ függvény képét mutatja. Mik lehetnek a k és A értékek?



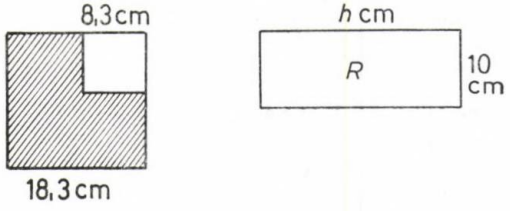
15. Tekintsük a Földnek azt az átmérőjét, ami átmegy Dundee városán (56 1/2° É 3° Ny). Mi a helyzete az átmérő másik végének? Mi a legrövidebb távolság a két pont között a Föld felszínén, tengeri mérföldben?

16. A P pontot — polárkoordinátákkal (3,0°) tükrözzük a $\theta = 20°$ egyenesre, adódik P' pont, amit azután a $\theta = 50°$ egyenesre tükrözünk. Ez lesz P'' pont. Mik a P'' polárkoordinátái?



17. Mekkora fokokban a $3y = x + 4$ egyenes és az x tengely szöge?

18. Az R téglalap területe egyenlő a négyzetek közötti vonalkázott területtel. Mennyi lehet h értéke?



B rész (50 pont)

19. $\frac{7}{12}$ az alábbiak melyikével egyenlő:

a) $\frac{2}{5} + \frac{5}{7}$; *b)* $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$; *c)* $1\frac{5}{9}$-nek a $\frac{3}{8}$ része; *d)* $\frac{6}{7} : \frac{1}{2}$.

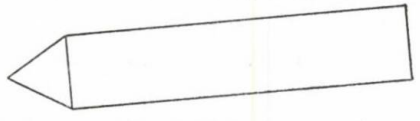
20. A $(2x-1) \cdot (x+3) = 2x^2 + 5x - 3$ állítás igaz

a) minden x-re,
b) semmilyen x-re,
c) egyetlen x értékre,
d) x két értékére.

21. Ha $f: x \mapsto \frac{5}{x+3}$, akkor $f^{-1}: x \mapsto$ *a)* $5/(x-3)$, *b)* $5x-3$, *c)* $5/x-3$, *d)* $5(x-3)$.

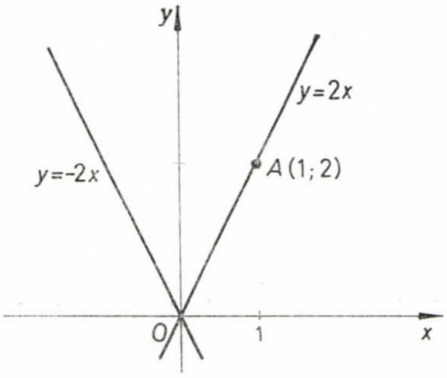
22. A hasáb szabályos háromszögekben végződik, a többi oldala pedig téglalap. Hány szimmetriasíkja van?

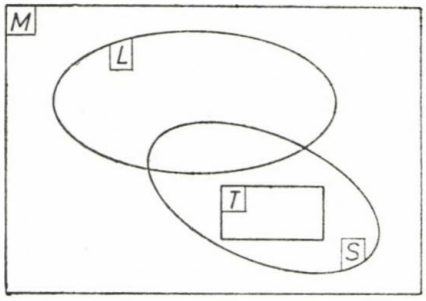
a) 1, *b)* 2, *c)* 3, *d)* 4.



23. S a sík azon pontjainak halmaza, amelyek egyenlő távolságra vannak az $y = 2x$ és $y = -2x$ egyenesektől, és két egységnyire vannak az A ponttól. S elemszáma:

a) 1, *b)* 2, *c)* 3, *d)* 4.





24. A rajzon $M=\{$mesebeli lények$\}$, $T=\{$tűzokádó állatok$\}$, $S=\{$sárkányok$\}$, $L=\{$lepcses gyíkok$\}$. Egyik tartomány sem üres. Mi van összhangban a diagrammal, s mi nincs?

a) $S \cup T = T$,
b) $T \subset \bar{L}$,
c) Minden sárkány tüzet okád.
d) Van lepcses sárkány is.

25. Tíznél kisebb k alappal $6_k \cdot 2_k = p$. Mi igaz, s mi nem:

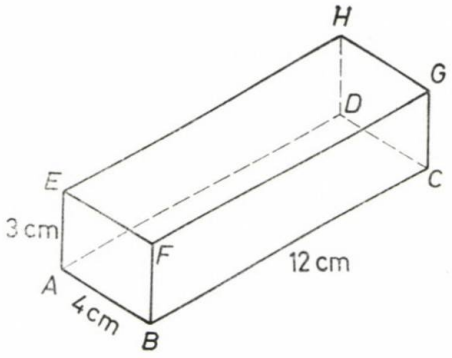
a) k lehet 5,
b) k lehet 8,
c) $p = 12_{10}$
d) $p = 12_k$.

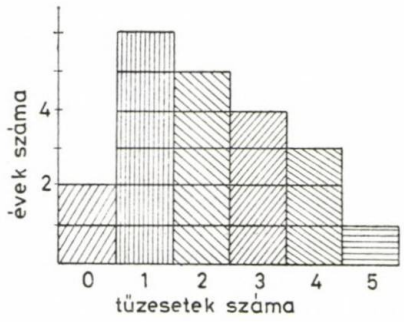
26. A $(-2; -1)$, $(0; 0)$, $(2; 1)$ pontok rajta vannak az f függvény görbéjén. Mi igaz, és mi nem (k konstans):

a) $f: x \mapsto kx$,
b) $f: x \mapsto kx^2$,
c) $f: x \mapsto kx^3$,
d) $f: x \mapsto k/x$.

27. A téglatest az $ABCD$ vízszintes síkon áll. Mi igaz, és mi nem igaz:

a) Egy vékony, 12,8 cm-es pálca elfér a téglatest belsejében.
b) A $CDEF$ téglalap területe 48 cm^2.
c) BH meredekebb szöget zárt be a vízszintessel, mint AH.
d) A $GABC$ gúla térfogata 24 cm^3.





28. A hisztogram egy kisvárosban az elmúlt húsz év során a tűzesetek gyakoriságát mutatja. Mi igaz, és mi nem az alábbiak közül:

a) A módus értéke 6.
b) A felső kvartilis értéke 3.

c) A hisztogramból látszik, hogy gyakrabban volt tűz az első tíz esztendőben, mint a másodikban.

d) 0,4 a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen választott évben a mediánnál kisebb a tűzesetek száma.

29. Mi igaz, mi hamis:

a) Ha az N négyszög forgásszimmetrikus, akkor N minden szöge egyenlő.

b) Ha az N négyszög negyedrendűen forgásszimmetrikus, akkor N négyzet.

c) Ha $PA=PB$, ahol A és B rögzített, akkor a P pontok mértani helye a térben egy körlemez.

d) Ha a T transzformáció nem változtat területet, akkor hosszúságot sem változtat.

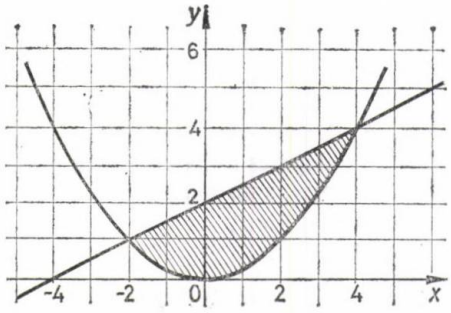
30. A görbe egyenlete $y=kx^2$, ahol k egy konstans. Mi igaz, mi nem:

a) Az egyenes egyenlete $x+2y=4$.

b) $k=1/4$.

c) A bevonalkázott terület 15.

d) Ha (x, y) a satírozott részben van, akkor $x+y$ legnagyobb értéke 4.



31. x és y számokra $x*y=2x-y$. Mi igaz, és mi nem:

a) $3*(-2)=8$, *b)* $p*(p*q)=q$,

c) $r*(p+q)=(r*p)+(r*q)$.

d) $x*x=x$ állításból következik, hogy x a $*$ művelet egységeleme.

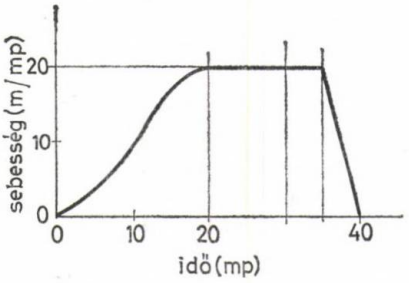
32. A grafikon egy autó sebességét adja m/mp egységben, egy 40 mp-es intervallumban. Mi igaz, mi nem?

a) Állandó a gyorsulás az első 20 mp-ben.

b) A maximális sebesség 72 km/h.

c) 50 mérföld megtétele után állt meg.

d) 10 m/mp az utazás átlagsebessége.



33. Az S négyzet csúcsai: (0; 0), (1; 0), (0; 1), (1; 1). A T transzformáció mátrixa pedig $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

a) A (3; 3) pont invariáns T-re.

b) A T egy ferde eltolás.

c) A $T(S)$ alakzat területe 2/3.

d) A T inverz transzformációjának mátrixa: $\begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix}$.

Az 1988-ban Budapesten rendezett Nemzetközi matematikatanítási kongresszus — ICME—6 — két plenáris előadása:

Bienvenido F. Nebres:

Az 1990-es évek iskolai matematikája: új irányzatok és a fejlődő országok feladatai

Gérard Vergnaud:

Elméleti felépítések és tapasztalati tények a matematikaoktatás pszichológiájában;

magyar nyelven is megjelent, és darabonként 30 Ft-os áron megrendelhető a TIT Természettudományi Stúdió 1113 Bp., Bocskai út 37. címén.

LUKÁCS OTTÓ
főiskolai docens
Bánki Donát Gépipari Műszaki Főiskola

Hozzászólás a valószínűségszámítás-matematikai statisztika oktatásához

Bevezetés

A valószínűségszámítás (VSZ) és matematikai statisztika (MST), valamint az ezek megoldásához szükséges számítástechnikai (SZT) algoritmusok oktatásában szerzett tapasztalataim kibővítéséhez felkértem hozzászólásra 15 matematikus kollégát (iskolában vagy egyetemen-főiskolán tanító pedagógusokat, ezenkívül az OPI, FPI munkatársait KöMaL volt szerkesztőjét). Időhiány miatt választ csak a következőktől kaptam:

Pálmay Lóránt (FPI), Surányi János (ELTE), Eglesz Istvánné (ált. isk.), Czapáry Endre (középisk.), Őri István (középisk.-főisk.), Bognár Jánosné (ELTE), Nemetz Tibor (Mat.-Kutatóintézet), Szentes Ottokár (főisk.-középisk.), Bakos Tibor (KöMaL).

Arra készültem, hogy az ő tapasztalataik és az enyémek összesítésével, a tantervek áttekintésével összefoglalót adok arról, hogy Magyarországon mit tanítottunk az utóbbi években, és mit kellene tanítani a VSZ-MST tárgykörökből, illetve ezek SZT megalapozásából. (Az anyaghoz értem még a kombinatorika — KO — oktatását is.) Mindezt elsősorban a középiskolára vonatkoztatva, de kitekintve az általános iskolai és egyetemi-főiskolai oktatásra is, külföldi tapasztalatokra is.

Aztán beláttam, hogy ilyen nagy anyagot, ilyen sokféle véleményt összesíteni egyetlen cikkben lehetetlen.

Mi lett a jelenlegi cikk célja?

1. A vélemények közös részének, „metszetének" a megállapítása,
2. Tennivalók, változtatási javaslatok.
3. Néhány konkrét feladat közrebocsátása a helyzet javításához.

A vélemények közös része

— A tantervekben, tankönyvekben igen szép anyagot állítottunk össze a KO és VSZ bemutatására,

— alig van azonban MST, és kevés a SZT algoritmus is a 3 tárgykör problémáinak megoldásához.

— Egyes iskolák, egyes tanárok a KO és VSZ bemutatásában jelentős eredményt mutatnak fel,

— azonban az iskolák tekintélyes részében még az előírt anyagot sem tanítják, hiszen az a Műv. Min. által kiadott TÖRZSANYAG-ban nem szerepel, vagy mert a tanárok idősebb része már elfeledte egyetemi ismereteit, a fiatalabbak pedig túl kevés képzést kapnak az egyetemen.

— Szentes Ottokárt idézem: „Egészében ez a többi matematikai témától elütő fejezet nehéznek bizonyult a tanulók részére. ... Nem volt mód eljutni az alkalmazásokig, így a diákok nem látták ennek a gyakorlati hasznát. ... A többségnél ez a kocka és a kártyajátékok matematikája maradt."

— A külföldet illetően máshol lényegesen nagyobb súlya van ezeknek a témáknak az oktatásban (MST és SZT is nagy súllyal szerepel!), viszonylag kevés országban viszont még rosszabb a helyzet, mint Magyarországon (ilyenek főleg az ipari vagy a kulturális területen nálunk fejletlenebb államok).

Tennivalók

Folytonos véletlen változónál a MST egyik fő feladata a következő. Az n elemű mintából az eloszlás legfontosabb jellemzőinek kiszámítása:

mintaátlag: $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$,

korrigált szórásnégyzet: $s_n^{*2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$,

tapasztalati eloszlásfüggvény:

$$F_n(x)=P(X<x)=\frac{\text{az } x\text{-nél kisebb adatok száma}}{\text{az összes adatok száma}},$$

tapasztalati sűrűségfüggvény:

$$f_n(x)\approx\frac{\text{az intervallumra eső adatok száma}}{(\text{összes adatok száma})\cdot(\text{intervallum hossza})}$$

(=az egységnyi intervallumra jutó átlagos valószínűség, ún. valószínűség-sűrűség).

Tudjuk, hogy ezáltal a folytonos eloszlást a mintából kapott diszkrét eloszlással közelítjük, az *egész sokaság* statisztikai jellemzőit a mintabeliekkel becsüljük:

várható érték $M(X)\approx\bar{x}$,
szórásnégyzet $D^2(X)\approx s_n^{*2}$,
eloszlásfüggvény $F(x)\approx F_n(x)$,
sűrűségfüggvény $f(x)\approx f_n(x)$.

Az oktatásban a hibát ott látom, hogy ha mindezt el is mondjuk a tanulóknak, nem értik világosan, hogy mi az az egész sokaság, vagy hogy a mintabeli értékek nem az egész sokaságbeli jellemző értékek, csak azoknak becslései. Miért? Mert soha sem vettek mintát valamilyen sokaságból. *A kezdő feladatokban célszerű tehát adott (diszkrét vagy folytonos eloszlású) sokaságból mintát vetetni a) kézi úton (pl. kártyákra felírt adathalmazból való kihúzással), b) számítógéppel.*

Néhány mintafeladat

Az átlag és szórás számítását a pedagógusok unalmas, csak alapműveleteket igénylő, rutinfeladatnak szokták ítélni. Ez igaz, de

1. diákjainkat a számítási rutinfeladatokra is meg kell tanítani,
2. a rutinfeladat is mindjárt érdekesebb, ha vele kapcsolatban megtanítjuk hallgatóinkat a zsebszámológépes statisztikai függvények használatára vagy számítógépi program írására,
3. az átlag és szórás direkt számításán kívül kitalálhatunk érdekes kérdéseket, játékokat, amelyek a fantáziát jobban megmozgatják,
4. gyakorlati alkalmazások „eljátszásával" bemutatjuk a MST gyakorlati hasznát.

Erre mutatunk most 4 példát. *Módszertani tanács: ne a tanár mutassa* a megoldást, írja fel az összes lehetőséget (unalmas!), hanem *kérdések útján, a diákok bevonásával* állítsa elő a lehetséges eseteket.

1. Az X: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 sokaságból vegyünk $n=5$ elemű mintákat (ismétlődés nélkül), számíttassunk átlagokat!

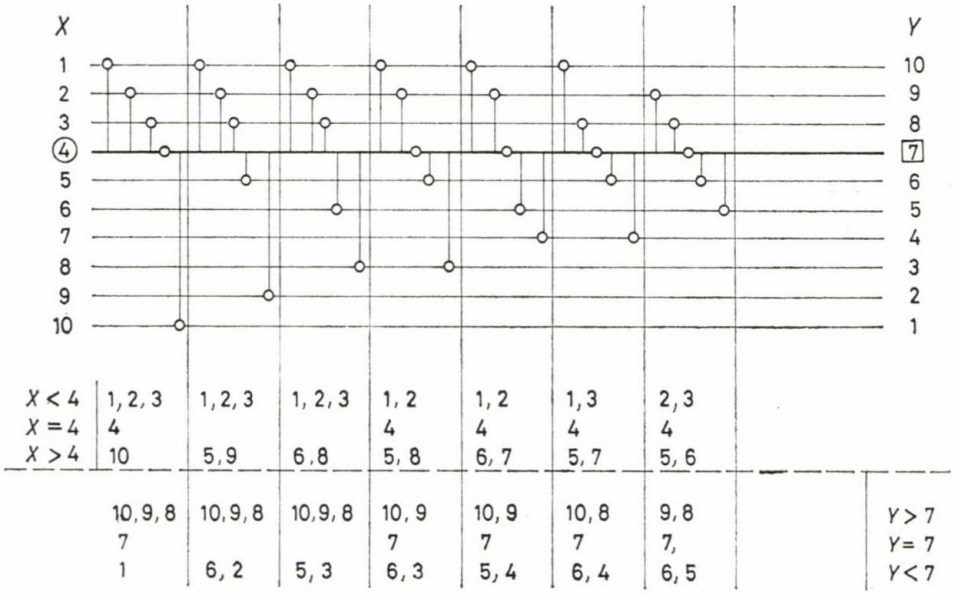
a) Pl. $\bar{x}=\frac{2+4+5+7+9}{5}=5{,}4$,

b) melyik a legkisebb mintaátlag? $\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$,

c) melyik a legnagyobb mintaátlag? $\bar{x}=\frac{6+7+8+9+10}{5}=8$.

d) Van-e olyan minta, amelyben az átlag 4?

Ehhez felhasználjuk a számtani középnek azt a tulajdonságát, hogy az adatok tőle való pozitív és negatív eltérései „kiegyenlítik egymást" (az eltérések összege 0). Az *1. ábra* mutatja az összes lehetséges megoldást (a lehetséges értékek most az ábra *bal* oldalán levő X értékek). — *Az ábrát a tanítványainkkal kell létrehozni,* figyelve arra, hogy az átlagtól való eltérések „lerontsák" egymást.



1. ábra

e) Van-e 7-es átlagot adó minta?

Van, mégpedig ugyanannyi, mint 4-es átlagú minta (lásd az *1. ábra jobb* oldalán az Y értékeket). Ha például a 4 átlagot adó mintaelemek

1, 2, 3, 4, 10 (X értékek),

akkor ennek a mintának megfelel egy 7 átlagot adó minta:

10, 9, 8, 7, 1 ($Y=11-X$ értékei).

f) Ehhez hasonlóan 3-as és 8-as átlagú minta ugyanannyi van (1-1), 5-ös és 6-os átlagú minták száma is azonos. *Hány olyan különböző, $n=5$ elemű minta lehetséges, amelynek átlaga* 5? (A mintaelemek különbözőségét már az elején kikötöttük.)

A feladatot most nem az átlagtól való pozitív és negatív eltérések ábrázolásával, hanem az eltérések kiszámításával oldjuk meg.

Legyen az 5 szám $5+e_1, 5+e_2, 5+e_3, 5+e_4, 5+e_5$. Az átlagtól való eltérésekre nyilván $-4 \leqq e_i \leqq 5$. Legyen az 5 átlagtól való pozitív eltérések összege $\Sigma e_i = x$ ($e_i > 0$), a nem pozitív eltérések összege $\Sigma e_i = y$ (itt $e_i \leqq 0$). A pozitív eltérések összege maximális esetben 9, viszont 2 vagy 1 már nem lehet, tehát

$$3 \leqq x \leqq 9.$$

Mivel az átlagtól való eltérések algebrai összege 0, vagyis $x+y=0$, ezért a nem pozitív eltérések összegére fennáll, hogy

$$-9 \leqq y \leqq -3.$$

Foglaljuk össze táblázatban a pozitív eltérések lehetséges értékeit, melléjük írva a lehetséges nem pozitív eltéréseket (*a diákokkal hozassuk létre* az összes lehetőséget, *engedjük meg közben a hibás próbálgatásokat is*):

$x = 9 = 5+4$ ——— $y = -4-3-2$

$x = 8 = 5+3$ ——— $y = -4-3-1$

$x = 7 =$ ⟨ $5+2$ ⟨ $y = -4-3-0$, $y = -4-2-1$; $4+3$ ⟨ $y = -4-3-0$, $y = -4-2-1$; $4+2+1$ — $y = -4-3$

$x = 6 =$ ⟨ $5+1$ ⟨ $y = -4-2-0$, $y = -3-2-1$; $4+2$ ⟨ $y = -4-2-0$, $y = -3-2-1$; $3+2+1$ — $y = -4-2$

$x = 5 =$ ⟨ $4+1$ ⟨ $y = -4-1-0$, $y = -3-2-0$; $3+2$ ⟨ $y = -4-1-0$, $y = -3-2-0$

$x = 4 =$ $3+1$ — $y = -3-1-0$

$x = 3 =$ $2+1$ — $y = -2-1-0$.

Az 5 átlagot adó, $n=5$ (különböző) elemű minták száma tehát 18.

2. Vizsgáljuk most az 1, 2, 3 elemekből álló sokaságot. *a)* Számítsuk ki a „teljes sokaság átlagát" (az úgynevezett *M várható értéket*), jellemezzük a várható értéktől való eltéréseket a D^2 *szórásnégyzettel, b)* vegyünk minden lehetséges módon $n-2$ elemű mintákat, számítsuk ki a *mintabeli (tapasztalati) átlagokat* ($\bar{x}$ értékeket) és *tapasztalati* s_n^2 *szórásnégyzeteket!*

a) A teljes sokaság átlaga („elméleti átlag", várható érték)

$$\boxed{M = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}} = \frac{1+2+3}{3} = 2,$$

a várható értékektől való eltéréseket rosszul jellemeznénk, ha az egyedi x_i értékekből kivonnánk az M értéket, és az így kapott $x_i - M$ eltéréseket átlagolnánk:

	x_i	$x_i - M$
	1	−1
	2	0
	3	+1
Σ (összesen)	6	0
	$M = 2$	5

$$\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-M)}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{3}(x_i-2)}{3}=0,$$

látszatra 0 szóródás mutatkozik a várható érték körül, ez a mérőszám nem jól jellemzi a teljes sokaság átlaga körüli szóródást. A problémát az okozza, hogy az ellentétes előjelű eltérések „lerontják" egymást. Célszerűbb tehát a várható érték körüli szóródás mértékéül az eltérések négyzetének az „átlagolása", vagyis jelen esetben a

$$\boxed{D^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-M)^2}{N}}$$

elméleti szórásnégyzet (teljes sokaság szórásnégyzetének) kiszámítása. Dolgozzunk táblázattal:

x_i	$(x_i-M)^2$
1	1
2	0
3	1
$\Sigma = 6$	2
M 2	$D^2=\frac{2}{3}=0{,}6666\ldots$

Az eltérések helyett az eltérések négyzetét átlagoltuk, ezért a várható érték körüli szóródásnak ezt a mérőszámát a szórás négyzetének tekintjük, ennek pozitív gyöke a *szórás:*

$$D=\sqrt{\frac{2}{3}}=0{,}8164\ldots$$

b) Vegyünk most az 1, 2, 3 alapsokaságból $n=2$ elemű mintákat minden lehetséges módon (tehát a kiválasztáskor ismétlődés is megengedett), számítsuk a következő mintabeli (tapasztalati) jellemzőket:

$$\boxed{\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}}\quad \textit{(mintaátlag)},$$

$$\boxed{s_n^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}\quad \textit{(tapasztalati szórásnégyzet)},$$

$$\boxed{s_n^{*2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}\quad \textit{(tapasztalati korrigált szórásnégyzet)}.$$

(Az utóbbiban a korrekció: n helyett $(n-1)$-gyel osztunk.)

$n=2$ elemű minta	Mintaátlag $\bar{x}$	Szórásnégyzet s_n^2	Korrigált szórásnégyzet s_n^{*2}
1,2	1,5	$(0,5^2+0,5^2)/2=0,50/2$	0,50
1,3	2	$(1^2+1^2)/2=2/2$	2
2,3	2,5	$(0,5^2+0,5^2)/2=0,50/2$	0,50
1,1	1	0	0
2,2	2	0	0
3,3	3	0	0
2,1	1,5	0,50/2	0,50
3,1	2	2/2	2
3,2	2,5	0,50/2	0,50
Σ	18,0	6/2	6
	mintaátlagok átlaga $\frac{18}{9}=2$	szórásnégyzetek átlaga $\frac{6/2}{9}=\frac{1}{3}=0,3333...$	szórásnégyzetek átlaga $\frac{6}{9}=0,6666...$

Ebben a diszkrét, háromelemű sokaságban a korrigálatlan szórásnégyzetek átlaga nem az elméleti szórásnégyzet (0,6666...), a korrigált szórásnégyzetek átlaga viszont az elméleti szórásnégyzet (a teljes sokaság szórásnégyzete). Így most egy mintavétel alapján *szemléletes példát láttunk* a MST egyik tételére:

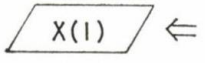
A korrigált szórásnégyzetek átlaga az elméleti szórásnégyzet körül ingadozik. Másként fogalmazva: a korrigált szórásnégyzet várható értéke maga az elméleti szórásnégyzet:

$$M(s_n^{*2}) = D^2,$$

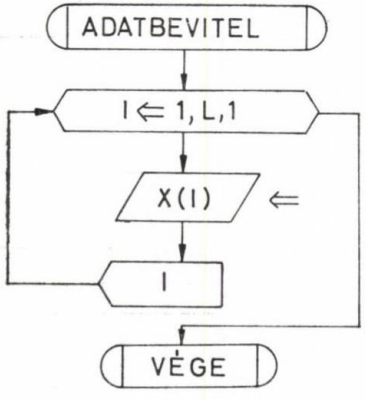
vagyis a korrigált szórásnégyzet *torzítatlan becslés* a teljes sokaság szórásnégyzetére, a korrigálatlan szórásnégyzet viszont *torzított becslés* D^2-re.

Ezért használják a MST-ban, a zsebszámítógépeken, a számítógépi softwerekben szívesebben a korrigált szórásnégyzetet.

3. Tanítsuk meg a számítógépet arra, hogy a memóriába vitt L elemű sokaságból *a)* válasszon ki véletlenszerűen N *különböző* elemű mintát, *b)* számítsa és írja ki a mintaátlagot, valamint a mintabeli (tapasztalati) korrigált szórásnégyzetet! (A sokaságot tekintsük egyenletes eloszlásúnak, tehát bármely szám húzása legyen egyenlő, valószínűségű.)



a)



b)

2. a), b) ábra

a) A diszkrét sokaság elemeinek *bevitele* a memóriába *az adatbeviteli utasítás (ciklusmag) L-szer való megismétlése.* Az adatbevitel jelölését a folyamatábrán a *2. a) ábra* mutatja, az utasítás COMMODORE—64 BASIC nyelven INPUTX(I) Az $I=1$-től L-ig 1-esével történő

megismétlést *(ciklust)* a folyamatábrán a *2. b) ábra* mutatja, COMMODORE—64 BASIC nyelvi megfelelője FOR I=1 TO L STEP 1, illetve NEXT I.

Az így bevitt $X(I)$ adatokból ($I=1, 2, 3, \ldots, L$) *N elemű mintát akarunk választani,* mégpedig úgy, hogy bármely elem választása ugyanolyan valószínűséggel történjen. Az egyenletes eloszlású sokaságból az $Y(J)$ elemek véletlenszerű kiválasztása ($J=1, 2, 3, \ldots, N$) a számítógépbe épített RND(Ø) függvény segítségével történhet (RANDOM=véletlen). A RND(Ø) függvény Ø és 1 közötti, egyenletes eloszlású véletlen számokat generál. Mi tulajdonképpen az $X(I)$ számok I indexét akarjuk véletlenszerűen kiválasztani. Mivel az I index 1 és L közötti egész szám (1-et és L-t is beleértve), ezért a RND(Ø) lineáris transzformációjával kell I-t előállítanunk:

$$Ø < \text{RND}(Ø) < 1,$$

$$Ø < \text{L} * \text{RND}(Ø) < \text{L},$$

$$1 < \text{L} * \text{RND}(Ø) + 1 < \text{L} + 1,$$

$$1 \leqq \text{INT}(\text{L} * \text{RND}(Ø) + 1) \leqq \text{L}.$$

Itt a * jel a BASIC nyelven a szorzás jele, INT(Z) pedig Z egész részét jelenti (INTEGER=egész).

Így RI=INT (L*ND(Ø)+1) már a szükséges, egyenletes eloszlású, 1 és L közti egész indexet generálja (1-et és L-et is beleértve). Legyen $Y(J)$ értéke egy-egy ilyen, az $X(I)$ értékek sokaságából véletlenszerűen kiválasztott szám. Az

```
I=INT(L*RND(Ø)+1)
Y(J)=X(I)
```

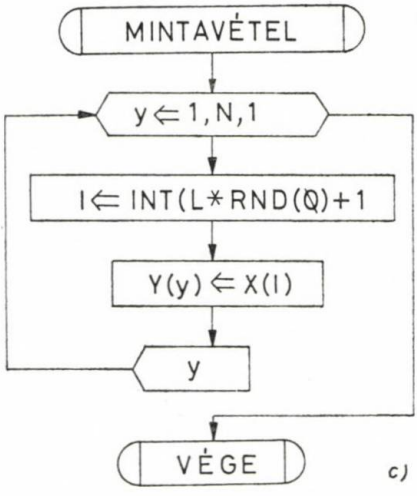
utasításpár megint ciklikusan megismétlődik, $J=1$-től N-ig 1-esével *(2. c) ábra).*

— Következik annak a vizsgálata, hogy *a mintaelemek valóban különbözők-e.*

Először azt kell vizsgálnunk, hogy $Y(1)$ egyenlő-e $Y(2)$, $Y(3)$, ..., $Y(N)$ valamelyikével. Vagyis azt, hogy $J=1$ esetén

```
Y(J)=Y(K)
```

fennáll-e ($K=J+1, J+2, \ldots, N$).



2. c) ábra

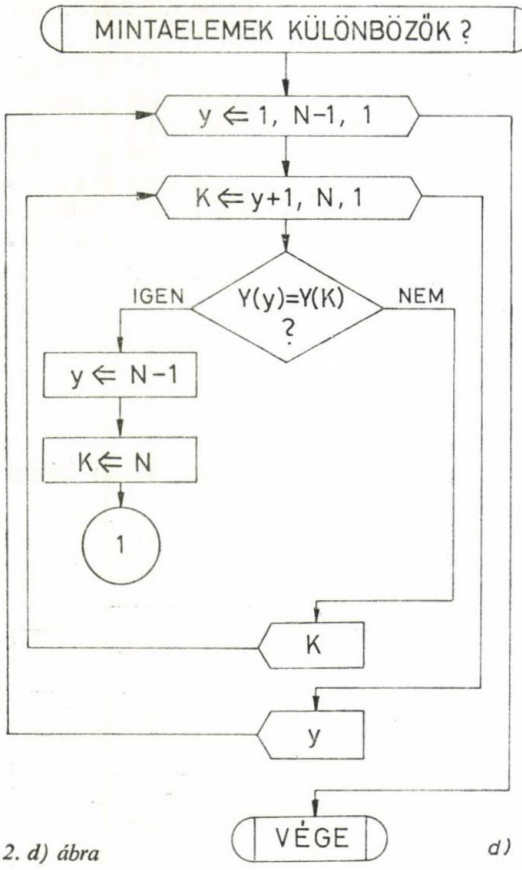
Azután $Y(2)$-re kell ($J=2$ esetén) ugyanezt megvizsgálni, és így tovább, egészen $Y(N-1)$-ig.

Kettős ciklussal kell tehát dolgoznunk. A *külső ciklusban* $J=1$-től $(N-1)$-ig 1-esével meg kell vizsgáltatnunk, hogy

```
Y(J)=Y(K)
```

fennáll-e (és ebben a *belső ciklusban* K megy $(J+1)$-től N-ig 1-esével). *A döntési utasításnál a program kettéágazik.* Ha valamelyik két mintaelem megegyezik, a ciklust le kell zárnunk (J-t és K-t végértékre állítjuk), és újból csináltatjuk a mintavételt. Ha a mintaelemek megegyezését nem tapasztaljuk, végigfuttatjuk a dupla ciklust *(2. d) ábra).*

b) Következik a most már biztosan különböző $Y(1)$, $Y(2)$, ..., $Y(N)$ *mintaelemek átlagának kiszámíttatása.* A $\sum_{J=1}^{N} Y(J)$ összeget egy S változó segítségével fogjuk



2. d) ábra

kiszámítani. Az S értékhez először hozzá kell adnunk $Y(1)$-et:

$$S_{\text{új}} = S_{\text{régi}} + Y(1),$$

vagy röviden

$$S \Leftarrow S + Y(1)$$

(S értékét növeljük meg Y(1)-gyel). Ezután a most kapott S értéket növeljük meg $Y(2)$-vel:

$$\Leftarrow S + Y(2),$$

és így tovább, utolsónak S értékét növeljük meg $Y(N)$-nel:

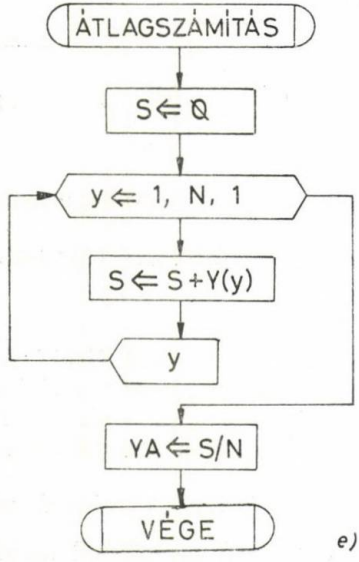
$$S \Leftarrow S + Y(N).$$

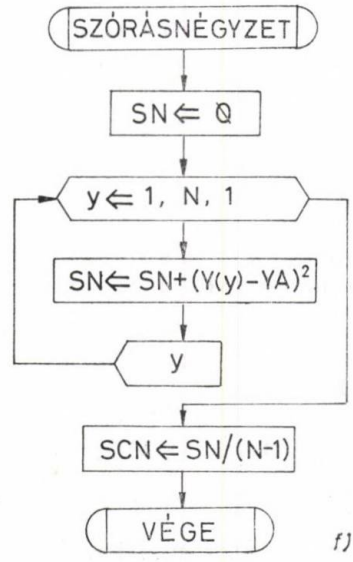
Vegyük észre, hogy itt is egyetlen utasítást ismétlünk meg ciklikusan:

$$S \Leftarrow S + Y(J)$$

$J = 1, 2, 3, \ldots, N$ értékekre. Az így kapott összeget N-nel osztva, megkapjuk az YA átlagot *(2. e) ábra).*

— A korrigált szórásnégyzetnél ugyanazt a *szummázó algoritmust* kell elvégeznünk, csak most *az $SN = \emptyset$ értékből kiindulva kell mindig újabb*





2. e), f) ábra

$(Y(J)-YA)^2$-*értékkel megnövelni SN-et:*

$$SN \Leftarrow SN + (Y(J) - YA)^2$$

($J = 1, 2, 3, \ldots, N$). A ciklus végére SN értéke $\sum_{J=1}^{N} (Y(J)-YA)^2$ lesz, ezt $(N-1)$-gyel osztva megkapjuk az SCN korrigált szórásnégyzetet *(2. f) ábra)*.

A *2. b), c), d), e), f) ábrán* kapott *alprogramokat* (szubrutinokat) összefűztük egy *fő folyamatábrává,* és lezártuk egy átlagot és korrigált szórásnégyzetet kiíratót utasítással (lásd a *3. ábrát*). Az így közölt algoritmus alapján az Olvasó *a számítógépi programot* már meg tudja írni.

3. ábra

4. *Most pedig játsszunk el diákjainkkal egy szakítószilárdság-vizsgálatot!* Írjuk fel a mért értékeket *rendezetlenül* kis cédulákra, és osszuk szét őket a tanulók közt:

$$|1{,}7|2{,}1-2{,}2|2{,}6-2{,}7-2{,}8|3{,}1-3{,}1-3{,}2-3{,}2-3{,}3-3{,}4|$$

$$|3{,}6-3{,}6-3{,}6-3{,}7-3{,}7-3{,}7-3{,}8-3{,}8-3{,}9-3{,}9|$$

$$|4{,}1-4{,}1-4{,}2-4{,}2-4{,}3-4{,}4|4{,}6-4{,}6-4{,}7-4{,}8-4{,}9|$$

$$|5{,}1-5{,}4|5{,}9|.$$

Tekintsük ezt egy, *a számegyenest folytonosan kitöltő véletlen változó értékeiből vett mintának* (hiszen a szakítószilárdság-értékek elvileg tetszőleges pozitív értéket felvehetnek). *Jellemezzük ezzel a mintával az egész sokaságot!*

a) A rendezetlenül kapott mintából kérdésekkel („kinek van 2 alatti szakítószilárdsága?", „kinél van 5 fölötti adat?") kerestessük meg a *legkisebb* és *legnagyobb* mintaelemet, ezek különbségeként *a minta terjedelmét:*

$$x_{max} - x_{min} = 5{,}9 - 1{,}7 = 4{,}2.$$

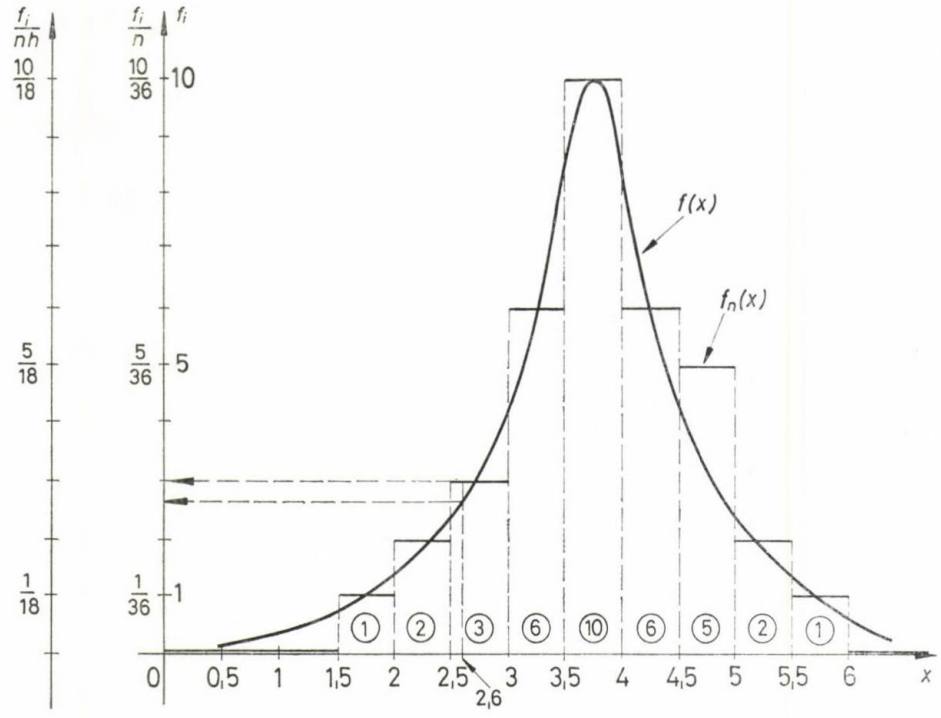
Rögtön megkérdezhetjük: vajon *az egész sokaságban* (a nem vizsgált, teljes szállítmányban is) csak 1,7 és 5,9 közé eshet a szakítószilárdság? (Nem, de kicsi a valószínűsége, hogy 1,7 alá vagy 5,9 fölé esik a szilárdság, hiszen *a helyesen vett minta jól jellemzi a teljes sokaságot.)*

b) Számíttassuk ki a *mintaátlagot és tapasztalati szórásnégyzetet* („kézi" számolással vagy zsebszámítógéppel vagy az előző számítógépi program ADATBEVITEL, ÁTLAGSZÁMÍTÁS, SZÓRÁSNÉGYZET, KIÍRATÁS alprogramjainak az összefűzésével). Az eredmény:

$$\bar{x} = 3{,}7777\ldots, \quad s_n^{*2} = 0{,}8526\ldots, \quad s_n^* = 0{,}92338\ldots .$$

Kérdezzük meg rögtön: vajon ugyanannyi-e az elméleti „átlag" (az M várható érték, amely már a teljes sokaságot jellemzi), mint $\bar{x}$. A helyes válasz: nem ugyanennyi, de M-re jó (torzítatlan) *becslés* az $\bar{x}$. — Ugyanígy tisztázható D^2 és s_n^{*2} viszonya is.

c) Ezekután a rendezetlenül kiadott adatokból csináljunk nagyság szerint *rendezett mintát.* Ilyesféle kérdésekkel: „kinek van 1,5—2,0 közé eső adata?", „hány mintaelem esik 2,0—2,5 közé?" — rögtön *osztályokba sorolva* kapjuk az adatokat, és *a szakítószilárdság eloszlását* azonnal jellemezhetjük a kapott f_i gyakoriságokkal, és *szemléltethetjük* a *4. ábrán* bemutatott *gyakorisági hisztogrammal.*



4. ábra

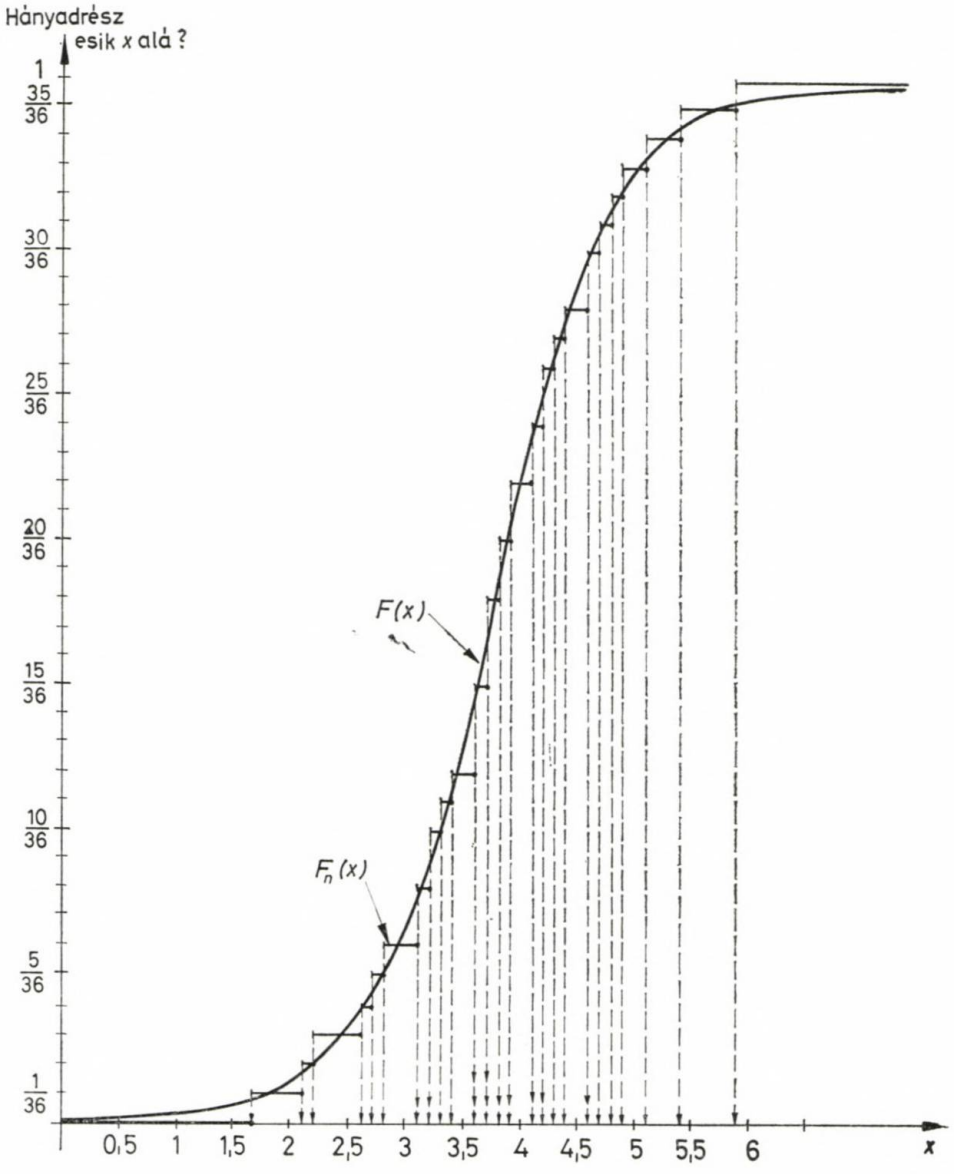
Ha most azt kérdezzük, hogy „a szilárdsági értékek hányadrésze esik 1,5 és 2,0 közé, 2,0 és 2,5 közé, ...", akkor ugyanezt az ordinátatengelyt átskálázva az f_i/n értékekre, az ábránk már egy *relatív gyakorisági hisztogram* (az 1/36, 2/36, ... valószínűségek szerinti eloszlást mutatja).

Nem mindegy viszont, hogy az 1/36, 2/36, ... valószínűségek milyen hosszú intervallumokon oszlanak szét. A különböző eloszlások egységes szemléltetése érdekében vezessük be tehát az egységnyi intervallumhosszra eső $\frac{1}{36 \cdot 0{,}5}$, $\frac{2}{36 \cdot 0{,}5}$, ... valószínűségeket $\left(\text{ún. } \frac{f_i}{n \cdot h} \textit{ valószínűség-sűrűségeket}\right)$. Így már az $f_n(x)$ *tapasztalati sűrűségfüggvény* szemléltetésének tekinthetjük a kapott téglalapdiagramot (hisztogramot).

— Ha van idő, vehetünk 36-nál több elemű mintát a szakítószilárdságra, kisebb terjedelmű osztályokba sorolva. Az így kapható finomabb beosztású tapasztalati sűrűségfüggvény még jobban mutatja a teljes sokaságbeli, *elméleti* $f(x)$ *sűrűségfüggvény haranggörbe alakját* (Gauss-féle *normális eloszlás*).

Mire jó ez a sűrűségfüggvény? Mutatja a szakítószilárdság eloszlását. Tegyünk fel kérdéseket. Melyik intervallumba (osztályba) esik legnagyobb valószínűséggel a szi-

lárdság? Tökéletesen szimmetrikus-e az eloszlás? (A tapasztalati nem az, de az elméleti igen.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy 1,5 alá essék a szilárdság? (A mintabeli sűrűségfüggvény alapján 0, az elméleti sűrűségfüggvény szerint kb. $0{,}5/36 = 0{,}0138\ldots$, azaz kb. 1,4%.) Várhatóan hány százalék esik a szabvány által minimálisan megkívánt 2,6 alá? (Mintabeli becslés $3/36 \approx 8\%$, az elméleti sűrűségfüggvényről kapott becslés $2{,}6/36 \approx 7\%$, ez *a selejtvalószínűség becslése*.) Mennyi esik 3,5 és 4,5 közé? (Várhatóan $10/36 + 6/36 \approx 44\%$.) Várhatóan mennyi esik 5 fölé? ($2/36 + 1/36 \approx \approx 8\%$-ra becsülhető az *első osztályú termékek aránya*.)



5. ábra

d) Ugyanígy kérdések útján történő rávezetéssel ki kell alakítani a *tapasztalati eloszlásfüggvény* ($F_n(x)$) fogalmát, vázolva egyúttal az *elméleti eloszlásfüggvény* ($F(x)$) létrejöttét. *Módszertani tanács:* ne az

$$F_n(x) \approx F(x) = P(X < x)$$

definícióval kezdjük! Inkább a következő kérdésekkel. Várhatóan a szilárdság hányadrésze esik 1,7 alá? (0/36 része, azaz 0%-a.) Hányadrész esik 2,1 alá? (1/36 része, azaz kb. 2,8%-a.) Így megmutatható, hogy $F_n(x)$ minden adatnál annyi harminchatoddal ugrik, ahányszor az az adat előfordul.

Mire jó az 5. ábrán kialakított tapasztalati (és elméleti) eloszlásfüggvény? Szintén *a szakítószilárdság eloszlásának jellemzésére.* Adjuk fel a sűrűségfüggvénynél is feltett kérdéseket, de a választ most az *5. ábráról* olvassuk le.

A tapasztalati sűrűség- és eloszlásfüggvény értékeinek kiszámítására szolgáló algoritmust és COMMODORE—64 BASIC-programot lásd az irodalomjegyzékben megadott 2. sz. könyv 119—120. oldalán, illetve a 3. sz. könyv 182—184. oldalán.

Összefoglaló javaslatok

A KO-VSZ-MST magyarországi oktatásában elértünk bizonyos eredményeket, de azokkal nem lehetünk elégedettek.

1. A matematikai statisztikát ma a mindennapi életben is alkalmazzák. Táblázatokat közölnek az újságok, az ipari minőség-ellenőrzésnél, műszaki és közgazdasági területeken statisztikai alapokon hozzák a döntéseket, a zsebszámológépeken — a számítógépeken különböző statisztikai szubrutinok találhatók, a számítógépekhez statisztikai programcsomagok vásárolhatók. Mindez azt támasztja alá, hogy a VSZ-MST az általános műveltség része kell hogy legyen, mégpedig a jelenleginél nagyobb mértékben.

2. Szükséges volna, hogy a KO-VSZ mellett több MST-t is oktassunk (legalább azokat az alapfogalmakat, amelyeket az előző feladatokban mutattunk).

3. A szükséges zsebszámítógépi MST függvények használata, a SZT algoritmusok és programok nélkülözhetetlenek.

4. Mindezeknek bele kellene kerülnie a Művelődési Minisztérium által kiadott Törzsanyagba.

5. A MST hagyományos oktatási módszerei helyett inkább ajánlom a VSZ és MST „kevert", egy időben történő bemutatását, mégpedig nem a szokásos úton (definíció-tétel-bizonyítás-példa), hanem példákon, gyakorlati alkalmazásokon kezdve, játékos módon.

6. A mintavétel szerepének a visszaállítása (cédulákra felírt adatok húzatásával vagy számítógéppel választva a mintát, diszkrét és folytonos eloszlásokból).

7. Az egyetemeken-főiskolákon a leendő matematikatanároknak a vizsgált témákban mind az elméleti, mind a módszertani képzést növelni kellene (ott, ahol az jelenleg még nem megfelelő).

IRODALOM

[1] NEMETZ TIBOR: *Valószínűségszámítás.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
[2] LUKÁCS OTTÓ: *Matematikai statisztika példatár.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.
[3] BRÜCKNER HUBA—LUKÁCS OTTÓ: *A folyamatábráktól a programozásig.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.
[4] LUKÁCS OTTÓ: *Valószínűségszámítás feladatokkal.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.
[5] BOGNÁRNÉ—NEMETZ—TUSNÁDY: *Ismerkedés a véletlennel.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.
[6] LUKÁCS OTTÓ: *Gyerekmatek.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1983., 1984.

AMBRUS ANDRÁS
adjunktus
ELTE TTK Budapest

A matematikaoktatás jelenkori problémái és perspektívái a Szovjetunióban, Angliában és az USA-ban

(I. rész)

Matematikaoktatásunk jelenlegi helyzetének, főbb problémáinak, tendenciáinak reális felméréséhez, értékeléséhez elengedhetetlenül szükséges kitekintenünk a világba, megvizsgálni a jelentősebb változásokat, irányzatokat. Az 1988. évi budapesti matematikaoktatási világkongresszus jó lehetőséget nyújtott napjaink matematikaoktatása néhány főbb irányzatának megismerésében. Úgy érzem azonban, hogy főleg a gondok, problémák elemzése egy világkongresszuson nem kerül teljes alapossággal felszínre, „túl szépnek" tűnik egy-egy kísérleti beszámoló. Ezért is tartom szükségesnek néhány jelentősebb tanulmány részletes elemzését, bemutatását. E tanulmányok az illető nemzet matematikaoktatását reálisan, kritikai szemmel értékelik, a jobbítási javaslatok is megszívlelendők. E tanulmányok elemzése elvezethet hasonló szellemű, részletes elemzésekhez a magyar matematikaoktatással kapcsolatban is. A következő tanulmányok alapján mutatom be a szovjet, angol és amerikai iskolai matematikaoktatás néhány főbb jellemzőjét, gondjait, reformelképzeléseit:

Vilenkin: A matematikaoktatás jelenkori problémái és ezek történeti vonatkozásai (Matematika v skole 1988/4.),

Vilenkin—Miszkin: A tudományos-technikai forradalom és az iskolai matematikaoktatás. (Matematika v skola 1987/3.)

Mathematics Counts (Cockroft Report, London, 1982),

School Mathematics, Options for the 1990-s. (Conference 1983, Madison).

I.

A szovjet iskolai matematikaoktatás helyzete, reformelképzelések

Néhány szót érdemes szólni a szovjet iskolarendszerről. Jelenleg még a tízosztályos általános képző középiskola van érvényben, 7 éves kortól kezdődik az iskolakötelezettség. Folyamatban van az áttérés a 11 osztályos általánosan képző iskolára. Az ún. „alsó tagozat" a jelenlegi 3 osztály helyett 4 osztályos lesz. Érdekesség, hogy 6. osztálytól kezdve külön tankönyv van Algebrából és Geometriából. Minden héten van rendszeresen geometria óra is.

A 60-as évek végén és a 70-es évek elején az ún. Kolmogorov-féle matematikatanítási reformelképzelések kerültek bevezetésre. A reformbizottság vezetője *A. N. Kolmogorov* világhírű szovjet matematikus volt.

Néhány jellegzetesség:

1. Sok olyan témakör, kérdés elhagyása, amelyeknek sem tudományos, sem gyakorlati, sem általánosan képző szerepe nem volt. (Pl.: négyzetgyökvonás algoritmusa, több nem különösebben fontos trigonometriai összefüggés, azonosság).

2. Több olyan fogalom bevezetése, amelyeknek mind matematikai, mind gyakorlati szempontból komoly jelentősége van. (Differenciálhányados, integrál, differenciálegyenlet, vektor, geometriai transzformációk.)

3. A függvényszemlélet megerősödése.

4. A szimbolika fiatalabb korban való bevezetése. Egyenletek, egyenlőtlenségek, mint jelentős feladatmegoldási módok előtérbe kerülése.

5. A tizedestörtek szerepének erősítése a közönséges törtekkel szemben.

6. Számargumentumú trigonometrikus függvények bevezetése, ezzel a trigonometria gyakorlati szerepének fokozása.

A vektor, a differenciálhányados, integrál fogalmának a bevezetése a fizikával való tantárgyi koncentráció hatékonyságát jelentősen fokozta.

A programhoz írt matematika-tankönyvekkel kapcsolatban több nehézség merült fel:

— túlzott absztrakció,
— a matematika gyakorlati alkalmazásainak az elhanyagolása,
— a szemléletesség és érthetőség elvének megsértése (ez a tömegképzésben nagyon fontos kérdés),
— öncélú szigorúság mind a tartalom, mind az anyag kifejtési stílusát tekintve.

A „tudományosság" jelszava alatt a legtöbb reformtankönyvben túlzott szerepet, jelentőséget kaptak a halmazelméleti fogalmak. Ez nehézkes meghatározásokhoz, a szükséges szemléletesség megsértéséhez vezetett. Például először a reláció fogalmának a definíciója szerepelt és ennek segítségével történt a függvény definiálása.

Először történt az ekvivalencia fogalmának a bevezetése, s csak azután került tisztázásra két polinom azonosan egyenlő volta.

A függvényt, mint binér relációt csak formálisan sajátították el a gyerekek, a képzetükben a függvényt egy nyíldiagram reprezentálta, viszont a nyíldiagramok csak véges halmazok leképezésének illusztrálására megfelelőek.

A matematikai analízis tankönyvi felépítése igen bonyolult volt, pl. az ún. $\varepsilon-\delta$-s határérték-definíció a tömegoktatásban rendkívüli nehézséget okozott.

Bár nem azonosítható a szovjet matematikatanítási reform az „Új Matematika" reformirányzattal, sok rokon vonást fedezhetünk fel bennük. Az utóbbi irányzat kritikája a 70-es években erősödött, éles bírálat érte a korai, túlzott mértékű absztrakciót, formalizálást, a halmazelmélet-fogalmaknak a kurzus elejére való sűrítését a célból, hogy a későbbi fogalmak ezen fogalmakra épüljenek, bonyolult jelölésrendszert, az axiomatikus módszer fetisizálását, a pedantériát, a valóságtól való elszakadást. Bebizonyosodott, hogy az „Új Matematika" a tanulók többsége számára sem könnyebb, sem érdekesebb nem lett, elszakadt a többi tantárgytól, kevés olyan alkalmazási lehetőséget biztosított, amelynek látták a hasznát.

A Szovjetunióban is éles bírálat érte a 80-as évek elején a Kolmogorov-féle irányzatot. Előtérbe került az iskolai matematikaoktatásnak az élettel való szorosabb kapcsolata, az alacsonyabb fokú absztrakció, formalizálás. Az újabb matematikai tanterv szakított az egységes halmazelméleti megalapozással, a legtöbb fogalom tartalmi szinten került bevezetésre. Erősödött a gyakorlati alkalmazások szerepe. Persze a halmazelméleti értelmezés esetenként álcázott formában előjön. Vilenkin különösen az osztályalkotás kérdésének a kihagyását sajnálja, szerinte ez igen fontos kérdés, hiszen a legtöbb középiskolát végzett ember életében a bonyolult egyenletek, egyenlőtlenségek, kigondolt bonyolult szerkesztések nem fordulnak elő, viszont a különböző objektumok, fogalmak osztályozása valamilyen formában gyakran előjön. A halmazszemlélet teljes kiűzése nehezíti az egyenletek, egyenlőtlenségek tanítását, sőt az informatika egyes kérdéseinek a tanítását is.

Az alábbiakban részletezzük Vilenkin és Miszkin elképzeléseit a matematikaoktatásról.

A matematikatanítás céljairól

Fontos a célok rögzítése, hiszen ezek világos megértésétől függ annak eldöntése, hogy egy adott téma bekerüljön-e a tananyagba, az elméleti és gyakorlati szempontok viszonya, a szükséges szigor stb. A célok meghatározásánál tekintetbe

kell venni, hogy a tanulók többsége az iskola elvégzése után a termelésben, a szolgáltatásokban, irányító apparátusokban, egészségügyben fog dolgozni. Célszerű szószerint idézni a szerzőket: „Az emberek döntő többsége nem találkozik sok matematikai fogalommal és állítással a gyakorlati életben, ezért gyorsan elfelejtődnek ezek az ismeretek az iskola elvégzése után. Két szempont viszont minden középiskolát végzett ember számára fontos:

1. *A logikus gondolkodás és a feladatmegoldási képesség fejlesztése.*

A tanulóknak képet kell kapniuk a pontos definíciók és megfogalmazások szerepéről, a fogalmak helyes osztályozásáról, a logikai következtetési módokról, meg kell ismerniük feladatok, problémák megoldási módjait — a nem matematikai jellegűekét is — analógia, összehasonlítás, analízis, szintézis, általánosítás stb. Ebben áll a matematika általános kulturális, humán jelentősége, a tanulók képességeinek fejlesztésében játszott szerepe. Ezt nem szabad alábecsülni.

2. *A gyakorlati matematikai gondolkodás fejlesztése. (A matematikai ismeretek alkalmazása.)*

A tanulóknak képet kell kapniuk a matematikának a tudományban és gyakorlatban játszott szerepéről. Elemi jártasságokat kell szerezniük a matematika alkalmazásaiban.

Vilenkinék igen fontos kérdésnek tartják a tantárgyi integrációt, különösen a matematika és fizika, továbbá a matematika és informatika tantárgyak kapcsolata lényeges.

A matematikai tananyagról

A gyakorlati életben játszott szerepük miatt a tizedestörtek sokkal fontosabbak, mint a törtek. Ki kell alakítani a tizedestörtekkel való műveletek készségét. A törtekkel való műveletek főbb jelentősége: jó előgyakorlatokat, tartalmi megalapozást, hátteret jelentenek az algebrai törtekkel való műveletekhez. A zsebszámológépek bevezetését a lehető legkorábbra kell tenni. Előtérbe kerülnek a közelítő értékekkel való számolások, a kerekítés, a becslés, háttérbe szorulnak az írásbeli műveletek. Teljes mértékben elvesztette jelentőségét a logaritmussal való számolás.

A logaritmus és exponenciális függvény a valóság folyamatainak a visszatükröződését, leírását szolgálja.

Trigonometria: előtérbe kerülnek a trigonometriai függvények (harmonikus rezgőmozgás). Bonyolult trigonometriai kifejezések átalakításának nincs különösebb jelentősége, felesleges sok időt szentelni erre.

Algebra: sok gyakorlati probléma megoldása szükséges, előtérbe kerülnek az egyenletek közelítő megoldásai, hiszen a gyakorlatban általában megfelelőek a közelítő gyökök, felesleges a pontos gyök meghatározása. Jelentős figyelmet kell szentelni a *függvények* tanításának, hiszen a modern technikában és tudományban a függvények centrális szerepet játszanak.

Fontos feladattá vált az algoritmikus gondolkodás fejlesztése, az algoritmus fogalmának a kialakítása. Az informatika és számítástechnika bevezetésének hatással kell lennie a matematikaoktatás tartalmára és feldolgozási módjára, stílusára is. Szükségessé vált a diszkrét matematika elemeinek a tanítása (kombinatorikai feladatok, optimális út meghatározása).

A gyakorlati életben játszott szerepe miatt egyre sürgősebb a statisztika elemeinek iskolai tanítása.

A matematikaoktatás stílusáról

Az iskolai matematikaoktatásnak tükröznie kell a valóság gyakorlati problémái matematikai eszközökkel való megoldásainak az útját, módját: matematikai modell megalkotása — a matematikai probléma megoldása — gyakorlati következmények levonása. Fontos alapelv:

a matematikai fogalmak csak akkor kerüljenek bevezetésre, amikor annak a haszna világossá válik a tanulók számára. Lehetőség szerint minden esetben végig kell gondolni egy-egy fogalom gyakorlatban játszott szerepét.

A matematikaoktatás minden szintjén fontos a *szemléletesség, fokozatosság, érthetőség*.

Fokozódik a szöveges feladatok jelentősége. E feladatok közt kell lenni olyannak is, mely nem kerek egész eredményhez vezet. Szerepeljenek olyan feladatok is, melyek felesleges adatokat is tartalmaznak. A valóságban gyakran előfordulnak egy adott vonatkozásban lényegtelen, felesleges adatok, ezek közül kell kiválasztani a megfelelőket. Gyakran maga a problémahelyzet sem egyértelmű, a kérdésfeltevést is pontosítani kell. Gyakran kell feladni „Hasonlítsd összse..." „Vizsgáld meg..." „Mérlegelj, gondold meg, fontold meg!" „Melyik a gyakorlat számára leginkább optimális megoldás?" jellegű feladatokat.

Fontos kialakítani a tanulókban, hogy a feladatok megoldása után vessék föl a kérdéseket: „Sok ez vagy kevés?" „Hogyan befolyásolják az egyes paraméterek lehetséges értékei az eredményt?" „Lehetne más úton is megkapni az eredményt?"

Fontos az intuíció fejlesztése. A feladatok megoldása előtt hozzá kell szoktatni a tanulókat a várható eredmény megbecsléséhez. Igen fontos a megoldások különböző ellenőrzési módjainak a kialakítása: józan ész, mértékegységek összevetése, extremális esetek vizsgálata, egyes paraméterek konkrét értékeivel való ellenőrzés.

Az axiomatikus módszer iskolai szerepéről

A tudományosság elvét többször többféleképpen értelmezték az iskolai matematikaoktatásban. Egy időben az volt a vélemény, hogy egyedüli tudományos lehetőség az iskolai matematika halmazelméleti alapon való felépítése. Más szakemberek azt hirdették a későbbiekben: az iskolai anyag felépítésére az egyedüli tudományos módszer az axiomatikus módszer alkalmazása.

Vilenkinék szerint e vélemények figyelmen kívül hagyják azt a fontos elvet, hogy a tudomány fejlettségét, fejlődését és annak iskolai tanítását élesen meg kell különböztetni egymástól, hiszen az iskolában a tanulók először hallanak sok-sok kérdésről, fogalomról.

A szerzők idézik *Félix Klein* szavait: „A matematika tanítása során nemcsak megengedett, hanem abszolút szükséges is kezdetben kevésbé absztraktnak lenni, állandóan figyelembe kell venni az alkalmazási lehetőségeket, s csak fokozatosan kell a pontosításhoz, precizitáshoz fordulni és csak olyan mértékben, ahogy azt a tanulók megértik és annak szükségességét érzik". A szerzők szerint ennek az általános pedagógiai elvnek minden tankönyvben érvényesülnie kell.

Az axiomatikus módszer megalkotása, kifejtése a tudományban is hosszú időt vett igénybe (pl. geometriában több ezer év). Éppen ezért a nem matematikai adottságú tanulókat — ilyen a tömegoktatásban részt vevők többsége — nem szabad már kezdetben agyonnyomni a „tudományossággal"; a „rendszerrel", hanem fokozatosan, konkrét anyagon keresztül kell elvezetni a tanulókat az absztrakt fogalmakig, tételekig. Fel kell kelteni és fejleszteni kell a tudományos gondolkodásukat, meg kell mutatni az axiomatikus rendszerhez vezető utat. Az axiomatikus módszer korai bevezetése a matematikaoktatásban ellentmond a gyakorlati irányultság elvének és az érthetőség, szemléletesség, fokozatosság elvének is. Feltétlenül figyelembe kell az oktatásnak azt is vennie, hogy még a matematikai tehetségek között is sokan nem formális logikai, hanem geometriai képi gondolkodási stílussal rendelkeznek. Számukra a geometria axiomatikus felépítése kevésbé érthetővé teszi e tárgyat.

Megemlítik a szerzők, hogy a jelenlegi iskolai axiomatikus felépítésekben gyakran találkozunk szemléletes megfontolá-

sokkal. (Megjegyezzük, hogy a már említett Kolmogorov-féle irányzat geometriafelépítése és a jelenleg is érvényben levő *Pogorelov*-féle 6—8. osztály számára szóló geometria axiomatikus felépítésű).

A szerzők hivatkoznak *Hincsinre,* aki szerint az iskolai geometria axiomatikus felépítése a tanulók formális ismereteihez vezet, hiszen a bevezetés során még nem érettek a szigorú logikai levezetések befogadására, számukra a szemlélet gyakran meggyőzőbb erejű. Egy sor olyan bizonyítást kell betanulniuk, amelyeknek sem célját, sem értelmét nem látják. Hasonló elvet vallott Poincare, Courant, Weyl, Bernstein. Érdekes Vilenkinék Gaussra való hivatkozását is megemlíteni, aki szerint a matematika a szem és nem a fül számára való tudomány.

Vilenkinék nem tartják megengedhetőnek semmilyen iskolai anyagrész axiomatikus tárgyalását. Természetesen meg kell mutatni a tanulóknak a módszer lényegét, de axiomatikával nem globálisan — azaz egy elmélet teljes axiomatikus felépítésével —, hanem csak lokálisan kell foglalkozni, a bizonyításokat nem formállogikai szillogizmusok láncolatának kell tekinteni, hanem mint a tények, összefüggések okainak meggyőző érveit.

Az iskolai geometriáról

Az euklidészi felépítés napjainkig befolyásolta az iskolai geometriaoktatást. Ma is hallani olyan véleményt, hogy csak e tradicionális rendszer racionális az iskola számára. Az euklidészi rendszer jellemző vonásai: alapvető szerepet játszanak benne: a háromszögek egybevágóságáról szóló axiomák és az objektumok tanulmányozásának statikus megközelítési módja. Persze a mozgás elvetésének jelentős filozófiai okai voltak Euklidész korában.

Ma a geometriai alkalmazásokban a mozgások, a transzformációk centrális szerepet játszanak. A mozgásokkal, a hasonlósági transzformációkkal már az óvodások is gyakran találkoznak, sok tapasztalatot szereznek e területen például a televízió révén is. Jogos azt állítani, hogy az iskolai geometriának a geometriai transzformációkra alapozott felépítése sokkal inkább megfelel a mai követelményeknek, mint a hagyományos. A szerzők megjegyzik, hogy a geometria hagyományos felépítése során közvetlenül ritkán használjuk fel a háromszög-egybevágósági tételeket, sokkal sűrűbben a következményeket, melyek lényegében a geometriai transzformációk elvén alapulnak: egyállású szögek tétele (párhuzamos eltolás), csúcsszögek tétele (centrális tükrözés), egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögeire vonatkozó tétel (tengelyes tükrözés). Ezért a geometriai transzformációk 8. osztály végére való beütemezése nem célszerű, ez már túl késő. (Ez a szovjet viszonyokra vonatkozó megjegyzés.)

Néhány fontosabb javaslat: a geometria oktatását egybe kell kapcsolni az iskolai rajzoktatással. Jelentős szerepet kell tulajdonítani a hosszúság-, terület- és térfogatszámításoknak és méréseknek. Rá kell mutatni, hogyan lehet a gyakorlatban alkalmazni bizonyos formulákat. (Fa magasságának meghatározása, elérhetetlen pont távolságának meghatározása, hordó térfogatának meghatározása stb.)

5—8. osztályban a tartalmi megfontolásokra épített geometriatanítás szükséges. Fő területek: hosszúság-, terület-, térfogatszámítási módok, geometriai transzformációk alkalmazása. A bizonyításokat tartalmi, szemléletes megfontolásokra kell építeni, szemléletesen nyilvánvaló dolgokat nem kell bizonyítani. A dedukciót fokozatosan kell bevezetni. Csak a 9. osztályban kellene a síkgeometria bizonyos axiomatikus áttekintését realizálni. A 10—11. osztályban a logikai nevelés mellett nagyon fontos a *térszemlélet és geometriai intuíció fejlesztése.*

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10., II.10., 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1215. Tudnivaló: van olyan ember, aki szereti a spenótot és mégsem gyöngyhalász. Minden zenerajongó gyöngyhalász, vagy legalábbis nem szereti a spenótot. Vagy az igaz, hogy aki nem gyöngyhalász az zenerajongó, vagy pedig az, hogy aki gyöngyhalász az nem zenerajongó. Lehet-e a spenótot szeretni és egyúttal a zenéért is rajongani?

1216. Igaz-e, hogy minden háromszög feldarabolható 1989 darab hasonló háromszögre?

1217. Egy kocka néhány lapját befestettük, majd e kockát egybevágó kis kockákra daraboltuk. A kis kockák közül pontosan 45 olyan akadt, amelynek egyetlen festett lapja sem volt. Az eredeti kocka hány lapját festettük meg?

1218. Legyen a p_1 és a p_2 két prím, szorzatuk pedig n. Bizonyítsuk be, hogy $\binom{n}{p_1}\cdot\binom{n}{p_2}$ osztható n-nel!

Kiss Géza Kisújszállás

1219. Melyek azok az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (páronként) különböző pozitív egészek, amelyekre

$$\frac{(x_1^P+1)(x_2^P+1)\ldots(x_n^P+1)}{(x_1^P-1)(x_2^P-1)\ldots(x_n^P-1)}$$

egész? Az n és a p 1-nél nem kisebb rögzített egészek.

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

1220. Adottak az $x_1, x_2, \ldots$ páronként különböző valós számok, amelyeket András ismer, de Tamás nem. Tamás bármely x_i, x_j párra kérdést tehet fel, s András megmondja, hogy $x_i<x_j$ igaz-e. Mutassuk meg, hogy ha Tamás okosan, ügyesen tesz fel 2^k-1 kérdést, akkor ő ezen számok közötti legalább $k2^{k-1}$ egyenlőtlenséget fog ismerni!

Róka Sándor, Nyíregyháza

Feladatmegoldások (1191-1196).

1191. Az $ABCD$ négyzet AB oldalára befelé, BC oldalára kifelé emeljük az ABP, illetve BCR szabályos háromszögeket. Igazoljuk, hogy D, P és R egy egyenesen vannak!

1. megoldás: Belátjuk, hogy a $DPR\sphericalangle=180°$, mert ebből már következik az állítás helyessége. Az ABP-$\triangle$ szabályos, tehát $APB\sphericalangle=60°$ *(1. ábra)*. A DAP-$\triangle$ egyenlő szárú, szárszöge 30°, így

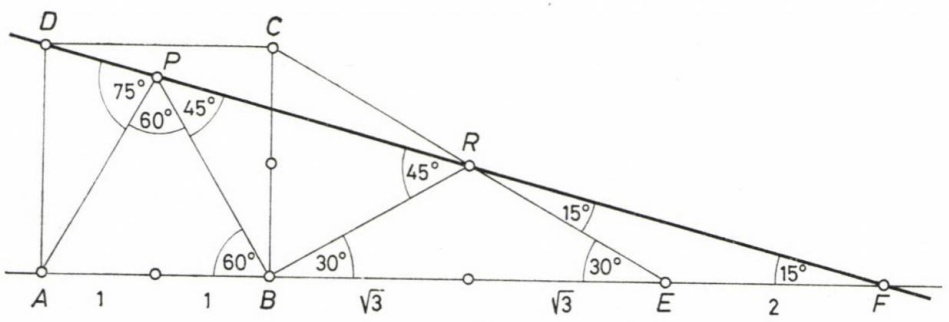
$DPA\sphericalangle = 75°$. Végül PBR-$\triangle$ egyenlő szárú derékszögű, hiszen $PBC\sphericalangle = 30°$, és $CBR\sphericalangle = 60°$, továbbá $BP = BR$, ennélfogva $BPR\sphericalangle = 45°$. Mivel $DPR\sphericalangle = DPA\sphericalangle + APB\sphericalangle + BPR\sphericalangle = 75° + 60° + 45° = 180°$, ezért a bizonyítással készen vagyunk.

Békéssy Szilvia, Budapest,
Horváth Géza, Zsely,
Mészáros Ágnes, Galánta

II. megoldás: A 15°-os $DFA\sphericalangle$ FA, illetve FD szárain úgy vesszük fel rendre az E, B, A, illetve az R, P és D pontokat, hogy $FE = ER = RB = BP = PA = AD$ teljesüljön *(1. ábra)*. A háromszögek belső szögeinek összegére, illetve a külső szögre vonatkozó tételekkel adódik az ábrán jelölt szögek mértéke. Ezekből pedig azt nyerjük, hogy az ABD ponthármast a C ponttal négyzetté kiegészítve az ABP-$\triangle$ szabályos, és P csúcsa a négyzet belsejében, míg a BCR-$\triangle$ ugyancsak szabályos, de R csúcsa a négyzet külsejében van. Ezzel az állítást igazoltuk.

Tóth Sándor, Sárospatak

III. megoldás: Ha a koordináta-rendszert úgy választjuk meg, hogy az x tengelye az AB, y tengelye az AD egyenes legyen, akkor a feladatbeli pontok koordinátái (feltehettük, hogy $AB = 2$ hosszúságegység): $A(0; 0)$, $B(2; 0)$, $C(2; 2)$, $D(0; 2)$, $P(1; \sqrt{3})$, $R(2+\sqrt{3}; 1)$. A D, P és R pontosan akkor kollineáris, ha a koordinátáikkal készített



1. ábra

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 \\ 2+\sqrt{3} & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

determináns értéke nulla. Erről első sora szerinti kifejtése,

$$-2(1-2-\sqrt{3})+1(1-2\sqrt{3}-3) = 0$$

meggyőz.

Dezső Gábor, Kolozsvár,
Fekete Pál Péter, Nagyszalonta

A megoldók száma: 68.

1192. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$(x^2-a^2)^2-4ax-1 = 0$$

egyenletet, ahol a adott valós szám!

Megoldás: Végezzük el a négyzetre emelést, majd adjunk az egyenlet bal oldalához $4a^2x^2 - 4a^2x^2 = 0$-t. Ekkor egyenletünk

$$x^4+2a^2x^2+a^4-4a^2x^2-4ax-1 = 0$$

További átalakításokkal:

$$(x^2+a^2)^2-(2ax+1)^2 = 0,$$

illetve

$$(x^2+a^2-2ax-1)(x^2+a^2+2ax+1) = 0,$$

azaz

$$(x-a-1)(x-a+1)[(x+a)^2+1] = 0$$

alakra hozható.

Ez $x_1=a+1$ és $x_2=a-1$ esetén teljesül, s mivel átalakításaink ekvivalensek voltak, megkaptuk eredeti egyenletünk (valós) megoldásait is. Az is adódott így, hogy az egyenlet további két (komplex) gyöke: $x_3=-a+i$ és $x_4=-a-i$.

Bíró Bálint, Eger,
Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 58.

1193. A $p(x)$ egész együtthatós polinom és $p(1985)=1987$, valamint $p(1988)=1989$. Mutassuk meg, a $p(x)$ polinomnak nincs egész zérushelye!

Varga István, Nagyszalonta

I. megoldás: Tegyük fel, hogy a kívánt tulajdonságú egész együtthatós polinom létezik és a fokszáma n. Legyen

$$p(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n.$$

Képezzük most a $p(1988)-p(1985)$ különbséget! Figyelembe véve, hogy 1988^k-1985^k minden pozitív egész k-ra osztható $1988-1985=3$-mal, viszont $p(1988)-p(1985)$ a feltételek következtében egyenlő $1989-1987=2$-vel, teljesülnie kellene az alábbi egyenletnek, ahol a (...) pontok helyén $u=1988$ és $v=1985$-ből képezett

$$u^{k-1}+u^{k-2}v+u^{k-3}v^2+\ldots+uv^{k-2}+v^{k-1}$$

szerkezetű numerikus egész kifejezések állnak:

$$3[a_0(\ldots)+a_1(\ldots)+\ldots\ \ldots+a_{n-1}] = 2.$$

Mivel a szögletes zárójel értéke (feltételeink értelmében) egész, ellentmondásra jutottunk: a bal oldalnak a 3 osztója, a jobbnak nem. Ebből következik, hogy a mondott tulajdonságú $p(x)$ egész együtthatós polinom nem létezik, és így egész nullhelye sem lehet.

Sugár György, Budapest

II. Megoldás. Legyen $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$. Mivel $p(1988)=a_0\cdot 1988^n+a_1\cdot 1988^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\cdot 1988+a_n=1987$ páratlan, következik, hogy a_n páratlan. Ezért, ha $p(x)$-nek van x_0 egész zérushelye, akkor x_0 páratlan kell legyen. Továbbá $p(1985)=a_0\cdot(1984+1)^n+a_1\cdot(1984+1)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\cdot(1984)+1)+a_n=2M+a_0+a_1+\ldots+a_{n-1}+a_n=1987$ páratlan (ahol $2M$ páros szám), így $a_0+a_1+\ldots+a_{n-1}+a_n$ páratlan szám.

Ezekután bármely $x_0=2k+1$ páratlan számra $p(2k+1)=a_0\cdot(2k+1)^n+a_1\cdot(2k+1)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\cdot(2k+1)+a_n=2N+a_0+a_1+\ldots+a_{n-1}+a_n$ páratlan szám$\neq 0$ (ahol $2N$ páros szám) azaz x_0 nem lehet zérushely, és ezzel az állítást bizonyítottuk.

Megjegyzés. Érvényes a következő általánosítás is, amint azt a fentiekből kiolvashatjuk:

ha $p(x)$ egész együtthatós polinom és létezik egy U páros szám, továbbá egy V páratlan szám, melyekre $p(U)\cdot p(V)$ páratlan, akkor minden x egész számra $p(x)$ páratlan.

Dr. Marosvári Péter, Budapest,
Tóth László, Szatmár

A megoldók száma: 41.

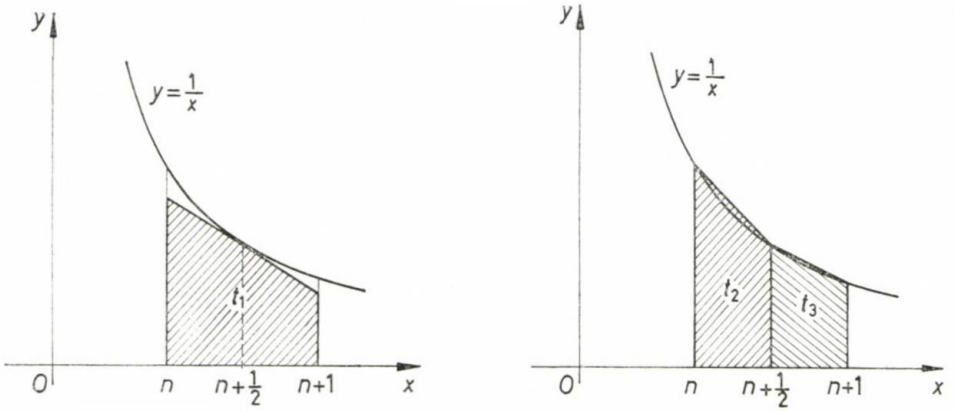
1194. Bizonyítsuk be, hogy az $n\geqq 1$ természetes számokra fennáll:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{2}{5}} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Sándor József, Farcád

I. megoldás: Az $y=\dfrac{1}{x}$ függvénygörbe konvex, ha $x>0$. Ezért grafikonja alatti területe az $[n; n+1]$ intervallumon a *2. ábra* szerinti trapézok területével:

(1) $$t_1 < \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx < t_2+t_3.$$



2. ábra

A t_1 területű trapéznak az egyik szára az $n+\frac{1}{2}$ abszcisszájú pontban húzott érintő, középvonala tehát $\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$ hosszú és így

$$t_1 = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

A t_2, illetve a t_3 területű trapézok az n, illetve az $n+1$ első koordinátájú pontokat az $n+\frac{1}{2}$ abszcisszájú ponttal összekötő húrok által származtatottak, tehát

$$t_2+t_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2n+1}+\frac{2n+1}{4n(n+1)} =$$

$$= \frac{8n^2+8n+1}{8n^3+12n^2+4n} = \frac{1}{n+\frac{4n^2+3n}{8n^2+8n+1}}.$$

$$\frac{4n^2+3n}{8n^2+8n+1} > \frac{2}{5}, \tag{3}$$

akkor és csak akkor, ha a

$$t_2+t_3 < \frac{1}{n+\frac{2}{5}},$$

azaz, ha az összevonások után (n pozitív egész!) számláló

$$20n^2+15n-16n^2-16n-2 = 4n^2-n-2 = \left(2n-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{33}{16} > 0.$$

minden pozitív n egészre. Ez pedig teljesül. Az (1), (2) és (3) miatt tehát

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n+\frac{2}{5}},$$

vagyis

$$e^{\frac{1}{n+\frac{1}{2}}} < \left(1+\frac{1}{n}\right) < e^{\frac{1}{n+\frac{1}{2}}}.$$

A bal oldali egyenlőtlenségből (a hatványozás monotonitása miatt)

$$e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}},$$

a jobb oldaliból

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{2}{5}} < e.$$

ha $n>0$, egész, és ezt akartuk bizonyítani.

Hornung Tamás, Zalaegerszeg,
Kovács Gabriella, Nagybánya

II. megoldás: Urbán János: Határérték-számítás, Műszaki Könyvkiadó, 1975. című könyv 39. *a* feladata (448. oldal) alapján

$$\text{(1)} \qquad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{2n+1}\left(1+\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{5(2n+1)^4}+\ldots\right).$$

Mivel $n>0$, ezért a zárójelben levő törtek pozitívak, tehát elhagyásukkal a jobb oldalt csökkentjük, vagyis

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{2}{2n+1} = \frac{1}{n+\frac{1}{2}},$$

ami akkor és csak akkor áll, ha

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} > \ln e,$$

azaz $x \mapsto \ln x$ monoton növekvő volta miatt

$$\text{(2)} \qquad e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Másrészt

$$\frac{1}{(2k-1)(2n+1)^k} < \frac{1}{(2n+1)^k} \quad k \geqq 1\text{-re},$$

tehát (1) miatt

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 2\left(\frac{2}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)^3}+\frac{1}{(2n+1)^5}+\ldots\right) =$$

$$= 2\frac{\frac{1}{2n+1}}{1-\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2} = \frac{4n+2}{4n^2+4n} = \frac{1}{n+\frac{2n}{4n+2}}.$$

Mivel $\frac{2n}{4n+2} > \frac{2}{5}$, ha $n>2$, ezért

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n+\frac{2}{5}},$$

(3) $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{5}} < e$$

ha $n>2$. Ám $n=1$, vagy $n=2$-re a (3) bal oldala e-nél kisebb, ezért (2) és (3) igazolja az állítást.

Mészáros József, Galánta

Megjegyzések: **1.** *Pólya György—Szegő Gábor:* Feladatok és tételek az analízis köréből, Tankönyvkiadó, 1980., I. kötetének 168. feladat alapján (megoldása az idézett mű 253. oldalán) az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p}$ sorozat pontosan akkor monoton csökkenő, ha $p \geqq \frac{1}{2}$. Ebből a feladat megoldása mellett, egy élesítését is nyerjük:

Ha $p<\frac{1}{2}$, úgy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p} < e$, véges sok n természetes egész kivételével!

Kiss Géza, Kisújszállás,
Kosztolányi József, Szeged

2. Az $f_\alpha:[1,\infty)\to\mathbf{R}$, $x\mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+\alpha}$, $0<\alpha<\infty$ függvény vizsgálatából azt is megmutathatjuk, hogy $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha} < e$ bármely $1 \leqq x$ és $0<\alpha<\frac{1}{\ln 2}-1$ valós számokra.

Dályay Pál, Marosvásárhely,
Tóth László, Szatmár

A megoldók száma: 21.

1195. Az a élű szabályos tetraéderben négy egybevágó gömböt elhelyezünk úgy, hogy mindegyik gömb a tetraéder három lapját és a másik három gömböt érinti. Mekkora e gömbök sugara?

Barabás Sándor, Nyírbátor

Megoldás: A gömbök O_1, O_2, O_3, O_4 középpontjai egy $2r$ élű szabályos tetraéder csúcsai. Az eredeti $ABCD$ tetraéder S súlypontja és az $O_1O_2O_3O_4$ tetraéder súlypontja azonos, hiszen az S közepű $\frac{2r}{a}$ arányú hasonlóság az eredeti tetraédert a gömbök középpontjai adta tetraéderbe viszi (*3. ábra*). Ismert, hogy a súlyvonalat a súlypont negyedeli és a súlyvonal hossza az él $\sqrt{\frac{2}{3}}$-szorosa. Ha az A csúcs talppontját E, az O_1 talppontját P jelöli a megfelelő tetraéderlapon, akkor

$$SE = SP+PE,$$

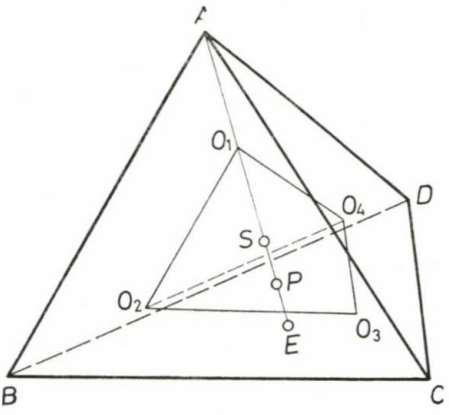
azaz $\frac{1}{4}AE=\frac{1}{4}O_1P+r$. Ebből pedig

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\,a=\frac{2}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\,r+r,$$

vagyis

$$r=\frac{\sqrt{2}a}{4\sqrt{3}+2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-1}{10}a.$$

Dezső Gábor, Kolozsvár,
Fekete Pál Péter, Nagyszalonta



3. ábra

II. megoldás: Az $ABCD$ tetraéder a közös belső pont nélküli $O_1O_2O_3O_4$ tetraéder és négy darab, az $O_2O_3O_4BCD$ 3-oldalú csonkagúlával egybevágó poliéder egyesítése. Így emezek térfogatának összege amannak térfogata, vagyis

$$V_{ABCD}=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=V_{O_1O_2O_3O_4}+4V_{O_2O_3O_4BCD}=\frac{8\sqrt{2}}{12}r^3+\frac{4r}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{4\sqrt{3}}{4}r^2+\frac{2\sqrt{3}ar}{4}\right).$$

Ebből azonos átalakításokkal

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{12}(a^3-8r^3)=\frac{4\sqrt{3}}{12}r(a^2+4r^2+2ar)\right],$$

azaz

$$\sqrt{2}(a-2r)=4\sqrt{3}r,$$

tehát

$$r=\frac{\sqrt{2}a}{4\sqrt{3}+2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-1}{10}a.$$

Dezső Gábor, Kolozsvár,
Sallai István, Zilah

Megjegyzés: A feladat egy általánosítását úgy kaphatjuk, hogy n sorba — az érintkezési feltételek megfelelő fenntartásával — összesen $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ darab gömböt helyezünk el. Az $ABCD$ tetraéder szögleteiben levő gömbök középpontjai adta tetraéderrel az előbbi felbontást nyerjük. Ekkor, ez utóbbi tetraéder éle $2r(n-1)$. Ezzel a fent látott módon az

$$r=\frac{a}{2\sqrt{6}+2(n-1)}$$

adódik, amiből $n=2$-re a feladatbeli kérdésre adtuk meg a választ.

Sallai István, Zilah

A megoldók száma: 38.

1196. Legyen $a_1=1$ és minden n pozitív egészre $a_{n+1}=(n+1)(a_n+1)$. Számítsuk ki a

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)$$

szorzatot!

Róka Sándor, Nyíregyháza

Megoldás; Tekintsük a $b_n=\frac{a_n}{n!}$ sorozatot. Ezzel

$$a_{n+1}=(n+1)!b_{n+1}=(n+1)n!b_n+1,$$

vagyis

$$n!b_{n+1}=n!b_n+1,$$

tehát

$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n!}.$$

Ezért

$$\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=\sum_{k=1}^{k}\frac{1}{k!},$$

azaz

$$b_{n+1}-b_1=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!},$$

ennél fogva $b_1=1$ miatt

$$a_{n+1}=(n+1)!b_{n+1}=(n+1)!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right).$$

De

$$1+\frac{1}{a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{1}{n+1},$$

ezért

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k}\cdot\frac{1}{k+1}=\frac{a_{n+1}}{1}\cdot\frac{1}{(n+1)!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

Ám

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=e$$

amint az közismert.

Kovácsné Gajdács Ibolya, Budapest,
Péter Árpád, Sepsiszentgyörgy,
Petkes Gergely, Nagykároly

A megoldók száma: 32.

A megoldók névsora (1191—1196)

Bagi Gábor, Barcs (1191—1193., 1195.); Bagó Istvánné, Győrújbarát (1191., 1193.); Baksa Ilona, Zánka (1191.); Bencze Mihály, Brassó (1191. 3 mód, 1192., 1193. 2-2 mód, 1194. 3 mód, 1195., 1196. 2-2 mód); Békéssy Szilvia, Budapest (1191., 1192.); Bíró Bálint, Eger (1191., 1192., 1195.); Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy (1191. 3 mód, 1192., 1193., 1194. 2 mód); Bíró Gábor, Kisvárda (1191—1195.); Boda Miklós, Pécs (1191., 1192., 1195.); Cenădan Gábor, Arad (1191—93., 1196.); Csepreginé Ambrus Gabriella, Budapest (1191—1193.); Csorba Ferenc, Győr (1191—1195.); Dályay Pál, Marosvásárhely (1191—1196.); Dezső Gábor, Kolozsvár (1191. 2 mód, 1192—1194., 1195. 3 mód, 1196.); Fazekas József, Kiskunfélegyháza (1191., 1192., 1195.); Fekete Pál Péter, Nagyszalonta (1191. 2 mód, (1192., 1193., 1195. 2 mód, 1196.); Földeák Árpád, Budapest (1191.); Grauszmann Ferenc, Szokolya (1191.); Hajna János, Pécs (1191—1196.); Hárspatakiné Dékány Veronika, Budapest (1191., 1192., 1195.); Hornung Tamás, Zalaegerszeg (1191—1194., 1196.); Horváth Géza, Zselíz (1191. 3 mód, 1195.); Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (1191. 3 mód, 1192., 1193., 1195.); Jagicza Zsolt, Gödöllő (1191., 1192.); Karsai Bálint, Nagyigmánd (1191.); Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép (1191—93., 1196.); Kiss Géza, Kisújszállás (1191—1193., 1194. 2 mód, 1195., 1196.); Kosztolányi József, Szeged (1191. 2 mód, 1192—94., 1196.); Kovács Béla, Szatmár (1191—93., 1195., 1196.); Kovács Gabriella, Nagybánya (1191—1196.); Kovácsné Gajdács Ibolya, Budapest (1191—1193., 1196.); dr. Marosvári Péter, Budapest (1191., 1192. 2 mód, 1193., 1195., 1196.); Matekovics Mihály, Arad (1191—1193.); Mészáros Ágnes, Galánta (1191.); Mészáros József, Galánta (1191—1194.); Mihálykó Csaba, Veszprém (1191—1193., 1196.); Náfrádi Ferenc, Győr (1191. 2 mód, 1192., 1193., 1195., 1196.); Nguyen Thanh Do, Berettyóújfalu (1191., 1192.); Péter Árpád, Sepsiszentgyörgy (1191. 2 mód, 1192—1196.); Petkes Gergely, Szatmár (1191. 2 mód, 1192—1194., 1195. 2 mód, 1196. 2 mód); Pölczmann Imre Róbert, Sopron (1191. 2 mód, 1192., 1193., 1196.); Rischákné Kishalmi Rózsa, Hódmezővásárhely (1191. 2 mód, 1192., 1193., 1196.); Sallai István, Zilah (1191., 1192., 1195.); Sándor József, Farcád (1191—1196.); Sebestyén László, Budapest (1191., 1192.); Sergyán Stefánia, Zalaegerszeg (1191., 1192., 1195.); Simon József, Csíkszereda (1191—93., 1195., 1196.); Steierlein István, Balatonfüred (1191—93., 1195.); Sugár György, Budapest (1191., 1193., 1195., 1196.); Sütheő Cecília, Szombathely (1191.); Szakál Károlyné, Békéscsaba (1191., 1192.); Szalainé Cseh Judit, Törökszentmiklós (1191., 1192.); Számadó László, Budapest, (1191. 3 mód, 1192., 1193.); Szűcs Zoltán, Budapest (1191. 2 mód, 1192., 1195., 1196.); Tóth Ferenc, Szeged (1191., 1192.); Tóth Géza, Cegléd (1191., 1192.); Tóth György, Szolnok (1191., 1192., 1195.); Tóth István, Gyula (1191., 1192., 1195.); Tóth László, Szatmár (1191—1196.); Tóth Sándor, Sárospatak (1191. 4 mód, 1192. 2 mód, 1193., 1194. 2 mód, 1195., 1196.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely, (1191—1196.); Varga István, Békéscsaba (1191. 3 mód, 1192—1196.); Vincze István, Szeged (1191—1193.); Wekszli Árpád, Csorna (1191., 1192.); Zakar Zoltán, Fegyvernek (1191., 1192.); Zalán Péterné, Budapest (1191., 1193—1196.); Zelei László, Pécel (1191., 1192., 1195.); Zsidó-Nagy György, Kolozsvár, (1191—1196.).

Lapunk 1988. évi legeredményesebb feladatmegoldóit könyvjutalomban részesítettük:

Bencze Mihály, Brassó,
Csorba Ferenc, Győr,
Hajna János, Pécs
Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza,
Petkes Gergely, Nagykároly,
Kovács Gabriella, Nagybánya,
Tóth László, Szatmár,
Tóth Sándor, Sárospatak,
Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely,
Varga István, Békéscsaba.

Új könyvek

ARNOLD, V. I.: *A differenciálegyenletek elméletének geometriai fejezetei*, Budapest, 1988, Műszaki Könyvkiadó, 276 oldal, 128 Ft.

BARTHA GÁBOR—BOGDÁN ZOLTÁN—CSÚRI JÓZSEF—DÚRÓ LAJOSNÉ DR.—DR. GYAPJAS FERENCNÉ—DR. KÁNTOR SÁNDORNÉ—DR. PINTÉR LAJOSNÉ: *Matematika-feladatgyűjtemény I.* a középiskolák tanulói számára, (2. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 556 oldal, 21 Ft.

BARTHA GÁBOR—BOGDÁN ZOLTÁN—DÚRÓ LAJOSNÉ DR.—GYAPJAS FERENCNÉ—HACK FRIGYES—DR. KÁNTOR SÁNDORNÉ—DR. KORÁNYI ERZSÉBET: *Matematika feladatgyűjtemény II.* a középiskolák tanulói számára, (2. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 487 oldal, 19 Ft.

BARTHA GÁBOR—BOGDÁN ZOLTÁN—DR. CSÚRI JÓZSEF—DÚRÓ LAJOSNÉ DR.—DR. GYAPJAS FERENCNÉ—DR. KÁNTOR SÁNDORNÉ—DR. PINTÉR LAJOSNÉ: *Tanári kézikönyv, Matematika-feladatgyűjtemény I.*, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 476 oldal, 105 Ft.

BÁN ISTVÁN: *Biomathematics and its application in plant cultivation*, Budapest, 1988. Akadémiai Kiadó, 204 oldal.

BENTLEY, JON LOUIS: *A programozás gyöngyszemei*, Budapest, 1988, Műszaki Könyvkiadó, 175 oldal, 95 Ft.

BORSÁNYI KATALIN—HACK FRIGYES: *Matematika-feladatgyűjtemény III.* a középiskolák tanulói számára, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 80 oldal, 3,50 Ft.

BOZSÁKI GÉZA: *Kirándulás a számítógépek szigetére*, (Utazások Matematikaországban 6), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 96 oldal, 35 Ft.

DEÁK KÁLMÁNNÉ: *Ajánlás a gimnáziumi matematika szabad sáv tananyagához*, Salgótarján, 1988, Nógrád Megyei Pedagógiai Intézet, 158 oldal, ár nélkül.

DÓSA ISTVÁN (összeállította): *Munkafüzet a matematika—fizika nyári tábor résztvevői számára*, (Módszertani levelek 1988/1), Veszprém, 1988, Megyei Pedagógiai Intézet, 93 oldal, 30 Ft.

FÁBOSNÉ ZÁCH ENIKŐ: *Zsebszámológépek használata a 4. osztályos matematika-tantervi anyag feldolgozásához*, Budapest, 1988, OPI, 60 oldal, 18 Ft.

KNUTH, D. E.: *A számítógép-programozás művészete 3*, Keresés és rendezés, Budapest, 1988, Műszaki Könyvkiadó, 761 oldal, 249 Ft.

DR. KORÁNYI ERZSÉBET—BARTHA GÁBOR—GYAPJAS FERENCNÉ—HACK FRIGYES—BOGDÁN ZOLTÁN—DÚRÓ LAJOSNÉ DR.—KÁNTOR SÁNDORNÉ DR.: *Tanári kézikönyv*, Matematika feladatgyűjtemény II., Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 370 oldal, 95 Ft.

KOVÁCS MAGDA: *Angol—magyar mikroszámítógép — mikroelektronikai szótár*, Budapest, Akadémiai Kiadó, 253 oldal, 197 Ft.

LUKÁCS OTTÓ: *Valószínűségszámítás feladatokkal*, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 268 oldal, 70 Ft.

NAGY BARNABÁS: *Az axonometria felfedezése. Térgeometria gyerekeknek*, (Utazások Matematikaországban), Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 83. oldal, 1 db melléklet, 40 Ft.

PÓLYA GYÖRGY: *Indukció és analógia*, (A matematikai gondolkodás művészete I. kötet), Budapest, 1988, Gondolat Kiadó, 308 oldal, 80 Ft.

RADNAI GYULÁNÉ SZENDREI JULIANNA: *Szakközépiskolai versenyek matematikafeladatai mindenkinek*, (Középiskolai szakköri füzetek), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 177 oldal, 50 Ft.

STEGENA LAJOS: *Vetülettan*, Egyetemi tankönyv, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 221 oldal, 28 Ft.

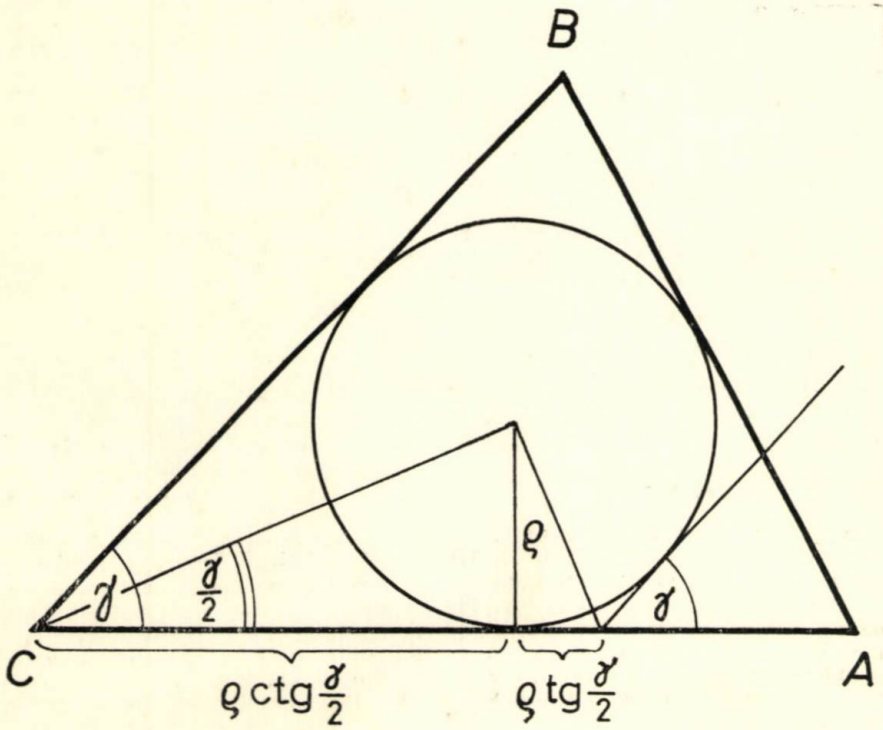
SZÁSZ GÁBOR *Matematika I.* (Vektorok, komplex számok, egyváltozós valós függvények), Egyetemi tankönyv, Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 437 oldal, 48 Ft.

SZELEZSÁN JÁNOS: *Fejezetek a matematikából számítástechnikusoknak*, Budapest, 1988, Számalk., 104 oldal, 230 Ft.

Dr. Scharnitzky Viktor

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



1989. XXXVI. évfolyam 5 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
URBÁN JÁNOS

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:
ÁCS PÁL, ELŐD ISTVÁNNÉ, HÓDI ENDRE, DR. KOLLER LÁSZLÓNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, LAJOS JÓZSEFNÉ, NÉMETHY KATALIN, PÁLMAY LÓRÁNT, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZENDREI JULIANNA, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1971 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

88-3710 — Szegedi Nyomda
F. v.: Surányi Tibor igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS

A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 42,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 7,— Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő adatokat is:
a) személyi számukat, *b)* asszonyok leánykori nevüket, *c)* lakáscímüket — irányítószámmal, *d)* foglalkozásukat (beosztásukat), *e)* munkahelyük pontos megnevezését (nyugdíjasok törzsszámukat), *f)* munkahelyük címét — irányítószámmal.

TARTALOM

Ambrus András: A matematikaoktatás főbb problémái Angliában II. 129
Török Turul: Angliai élmények és tapasztalatok II. 134
Wolfgang Dörband: A trigonometria legismertebb tételeinek levezetése a háromszög normálisainak tételéből és a tetraéderre való általánosítás II. Trigonometria és a tetraéder 142
Ábrahám István: A matematikaoktatás és a tankönyvek 149
Dr. Scharnitzky Viktor: Matematikus vándorgyűlés Veszprémben 153
KÖNYVISMERTETÉS 154
Hírek 155
FELADATOK 156
ÚJ KÖNYVEK 160

INHALT

Ambrus, András: Gegenwartige Probleme und Perspektiven des Mathematikunterrichts in England II. 129
Török, Turul: Erlebnisse und Erfahrungen aus England II. 134
Wolfganag Dörband: Die Ableitung der bekanntesten Setzen der Trigonometrie von dem Satz der Normalen des Dreieckes und die Verallgemeinerung auf Tetraeder II. Trigonometrie und das Tetraeder 142
Ábrahám, István: Die Mathematische Unterricht und die Lehrbücher 149
Dr. Scharnitzky, Viktor: Wandersammlung der Matematiklehrer und — Professoren in Veszpremin 153
RECENZIO 154
Nachrichten 155
AUFGABEN 156
NEUE BÜCHER 160

СОДЕРЖАНИЕ

Амбруш Андраш: Главные проблемы обучения математики в Англии II. 129
Тэрэк Турул: Опыты и переживания из Англии II. 134
Волфганг Дёрбанд: Выведение наиболее известных теорем тригонометрии из теоремы нормали треугольника и обабщение на тетраэдер II. Тригонометрия и тетраэдер 142
Абрахам Иштван: Обучение математики и учебники 149
Др. Шарницки Виктор: Выездная сессия математиков в Взспреме 153
РЕЦЕНЗИЯ О КНИГЕ 154
Сообщения 155
ЗАДАЧИ 156
НОВИЕ КНИГИ 160

AMBRUS ANDRÁS
adjunktus
ELTE, TTK Budapest

A matematikaoktatás főbb problémái Angliában

II. rész

A Cockroft-jelentés elemzése

Néhány szót az angol iskolarendszerről is kell szólni: 6—16 éves korig tart a tankötelezettség. Az alapiskola 5—11 éves korig, a középiskola 11—16 éves korig terjed. A középiskola elvégzése önmagában nem jogosít felsőfokú tanulmányokra, ehhez további 2 éves tanulmányokra van szükség. Ezt a formát csak a fiatalok kisebb része vállalja.

Az angol oktatási rendszer fontos eleme a vizsgák sorozata, melyeket az iskoláktól független vizsgabizottságok szerveznek és bonyolítanak le.

Nincs egy egységes, egész országra érvényes matematikai program. A tanítandó anyagot a vizsgatematikák és a tankönyvek határozzák meg, a végső döntés joga az egyes iskolák kezében van. Hozzávetőlegesen a tanulók 85%-a tesz 16 éves korban matematikai vizsgát, míg a 18 évesek 5-6%-a tesz csak matematikából vizsgát. A 16 évesek számára két különböző szintű matematikai vizsga létezik, egy alacsonyabb szintű — a tanulók 60%-a ezt a vizsgát teszi le — és a tehetségesebb tanulók számára. (25%.)

1978-ban egy parlamenti bizottság javaslatára létrehoztak egy kutató csoportot a matematikaoktatás helyzetének a vizsgálatára.

Jelentős szerepet játszott ebben a munkaadók elégedetlensége, akik szerint sok iskolátvégzett ember nem rendelkezik a munkához és a mindennapi élethez szükséges elemi matematikai ismeretekkel, jártasságokkal. A bizottság vezetője Cockroft professzor lett, innen ered a nemzetközi szakirodalomban is elterjedt „Cockroft-jelentés" elnevezés. A kutatócsoport 1982-ben publikálta először kutatásai eredményeit. A tanulmány három fő részből áll:

1. A mindennapi gyakorlat által megkövetelt matematikai ismeretek, jártasságok, készségek, képességek.
2. A matematikaoktatás realizálása, a különböző iskolafokozatok speciális problémái.
3. A tanárképzés néhány kérdése.

Megjegyezzük még, hogy a Cocroft-bizottság tagjai között voltak alap- és középiskolai matematikatanárok, tanárképzési szakemberek, tanügyigazgatási szakemberek, munkaadók, vállalati szakemberek, matematikusok.

I.

A gyakorlati élet követelményei a matematikaoktatással szemben

A felnőtteknek a mindennapi életben a következő matematikai ismeretekkel, készségekkel, képességekkel kell rendelkezniök: számok olvasásának képessége, számolni tudás, pontos idő megnevezése, bevásárlások végzése, súlymérés, hosszmérés, egyszerű leírások, nem bonyolult grafikonok, ábrák, diagramok megérté-

se és az ezekkel kapcsolatos számolások elvégzése. „Számérzet", amely lehetővé teszi a műveletek, eredmények ésszerű értékelését, (szemmérték fejlesztése) egyszerűbb műveletek elvégzése fejben.

Igen fontos az önbizalom, a saját erőbe vetett hit, hogy a matematikai ismereteiket tudják alkalmazni, képesek erre.

Munkahelyi szükségletek

A vizsgálatok kiderítették, hogy a munkahelyek által megkívánt matematikai ismeretek szerepelnek a középiskolai matematikaanyagban, viszont ezen ismeretek alkalmazásmódjai között jelentős eltérések vannak. A matematikai apparátus iskolai körülmények közötti alkalmazása teljes mértékben különbözik a mindennapi életben, munkahelyeken való alkalmazási módtól. Az üzemek kívánságai között az első helyet az ún. „mérésérzet" foglalta el. Ez nemcsak konkrét számolás elvégzését, közelítő becslést, értékelést és mérőeszközök használni tudását jelenti, hanem a mérés céljának, különböző módjainak megértését, továbbá annak meghatározását, eldöntését, hogy egy konkrét szituációban melyik módszer alkalmasabb.

II.

Az egyes iskolafokozatok matematikaoktatásáról

Minden iskolafokozatra vonatkozólag fontosnak tartja a jelentés, hogy a tanulóknak legyen meg az önbizalma, a saját erejükbe vetett hite a matematikai ismereteik alkalmazását illetően. A másik jelentős megjegyzés: az iskolai matematikaoktatásban nem csak azok a tevékenységek, ismeretek hasznosak, melyeknek konkrét gyakorlati alkalmazásuk van.

Világosan megfogalmazza a jelentés, hogy a matematika tanulása nehéz, sok erőfeszítést, sok munkát és sok gyakorlást kíván. Öt komponenst tart fontosnak a bizottság a matematikaoktatás minden szintjén:

— Az anyag feldolgozási módja lehetséges:
  a) tanári magyarázat segítségével;
  b) tanár és tanulók együttes munkájával;
  c) csoportos vagy egyéni munkával. Mindhárom feldolgozási, szervezési formának van létjogosultsága, az adott körülmények között kell dönteni (osztály színvonala, tananyag nehézségi foka stb.).
— Szükséges megfelelő gyakorlati jellegű munkák készíttetése (modellek, tervrajzok, kirándulás tervezése stb.).
— Fontos az alapvető ismeretek, jártasságok trenírozása, gyakorlása.
— Lehetőség szerint a mindennapi életből kell válogatni minél több feladatot.
— A kutató munka megismertetése.

Éles bírálatban részesül a jelentésben az „Új Matematika" reformirányzat. Kihangsúlyozza a jelentés a fejszámolás, a becslési képesség kifejlesztésének fontosságát. Az utóbbi években Angliában is háttérbe szorult a fejszámolás az alsó tagozatos matematikaoktatásban. A jelentés szerint ezzel a „fejben végzett munka, a fejben végzett műveleti gondolkodás" elveszítette centrális helyét, holott ez fontos a matematikaoktatás minden szintjén. Fontos feladat a számok tanítási metodikájának kidolgozása.

A vizsgálatok során élesen kijött az egyes korosztályokon belüli szóródás a matematikai képességeket illetően. Ennek során „hétéves különbség" is előfordult, nevezetesen volt olyan 14 éves gyerek, aki nem tudott megoldani egy 11 éves gyerek számára előírt feladatot, de volt olyan 7 éves tanuló, aki meg tudta oldani ugyanezt a feladatot. (Írd le a 6399-nél 1-gyel nagyobb számot!) A matematikai programok összeállításánál ezeket a különbségeket figyelembe kell venni.

Zsebszámológépek, komputerek

Két alapvető kérdés merül föl:

1. A zsebszámológépek milyen fajta alkalmazási módjai teszik könnyebbé és hatékonyabbá a matematikatanítási folyamatot.
2. A zsebszámológépek használata milyen mértékben változtatja meg a tanítási anyagot, illetve az egyes témák tanítási szempontjait.

Felmerült az a gyanú, hogy azok a gyerekek, akik túl korán használnak számológépet, nem érik el a számolásban a megfelelő gyorsaságot és hiányzik náluk a végeredménybe vetett hit „bizonyosság". Bár oda kell figyelni erre a veszélyre, a jelentés beszámol olyan amerikai zsebszámológépekkel végzett kísérletekről, amelyek szerint a géphasználat nem hat negatívan az alapvető számolási készségek kifejlődésére.

A komputert mint a matematikaoktatás egyik fontos segédeszközét kell tekinteni. Alkalmazása lehetővé teszi a gyakorlati életből vett reális problémák megoldását, továbbá új szervezési módok alkalmazását az oktatásban. Tapasztalatok szerint a computer használata különösen a tehetséges tanulók fejlődését gyorsítja meg.

Alapiskola (5—11 év)

Az első években a nyelvben és a számolásban való jártasságot kell kialakítani a gyerekekben. Meg kell tanulniuk gondolkodni, észlelni, cselekedni, jelenségeket, tárgyakat vizsgálni, tanulmányozni és felfedezni. Mindezekhez a matematikatanítás hatékonyan hozzájárulhat. A matematikának nemcsak a matematikai gondolkodásra és a pontosságra kell nevelnie a tanulókat, hanem nyelvi és esztétikai tapasztalatokhoz is kell juttatni őket, el kell látni őket a környezet vizsgálatához szükséges eszközökkel, fejleszteni kell a gondolkodási, logikai képességüket. Igen fontos a gyakorlati tevékenység a matematikaórákon. A konkrét tárgyakkal végzett manipulációk, az ábrákkal, diagramokkal végzett munkák — amikoris valódi tárgyakat helyettesítenek a rajzok — elvezetnek a szimbólumok fázisához, amely szinten absztrakt műveletvégzés válik lehetővé. Van olyan felfogás a matematikadidaktikában, amely szerint egy bizonyos kortól kezdve már nem szükséges a konkrét tárgyakkal való manipulálás, illetve ez csak a gyengébb tanulók számára fontos. A jelentés szerint még a fejlett absztrakt gondolkodású gyerekek számára is fontos a konkrét tevékenység, főleg új fogalmak, összefüggések bevezetésekor.

A nyelv fontos szerepet játszik a matematikai összefüggések megfogalmazásában, kifejezésében, ennek ellenére nem fordítanak kellő gondot e kérdésre a matematikaoktatás során. Első naptól kezdve kell csiszolni, alakítani a gyerekek kifejezőkészségét. Ezért is fontos a szóbeli munka is a matematikaórákon, s nem csak az írásbeli munka.

Fontosnak tartja a jelentés, hogy a gyerekek ne csak mechanikusan tudják az egyes műveleteket, hanem az adott szituációknak megfelelően ésszerűen tudják alkalmazni őket.

Középiskola (11—16 év)

Fontos az azonos életkorú tanulók közötti különbségek figyelembevétele. Jelenleg sok tanulónak olyan programot kell elvégeznie, amely képességei és ismeretei szintjéhez viszonyítva túl magas. Az eredmény: még az alapvető jártasságok sem alakulnak ki bennük. A tananyag feldolgozásában az „alulról felfelé" elvet kell realizálni. Az anyagot először alacsonyabb szinten, a gyerekek fejlettségének megfelelően kell kidolgozni, fokozatosan kell szélesíteni, bővíteni a gyerekek fejlettségi szintjének megfelelően. Nem szabad a programba egyetlen olyan anyagrészt sem bevenni, amely megfelelő mértékben nem tehető világossá, érthetővé a tanulók részére, amelyet nem tudnak elsajátítani.

A fentiek miatt is szükséges a középiskolában különböző szintű matematikai kurzusok indítása.

A jelentésben „Alapvető előírások" címmel szerepelnek azok a követelmények, amelyeket az alapkurzusok résztvevőinek is teljesíteniök kell. Három fő követelményt tartanak fontosnak:

— olvasni, írni, beszélni tudni a matematikáról különböző szituációkban;
— különböző számolási formák birtoklása: fejben, írásban, eszközzel;
— mérések és számolások összekapcsolása, megfelelő mértékegységek használata.

Az alapvető követelmények között szerepel: számok, pénznemek, százalék, arányok, relációk, statisztika elemei.

Az előírt követelményrendszer lényegesen kevesebb, mint a hagyományos programok által előírt, viszont az így megfogalmazott ismeretek feldolgozása világos és érthető a tanulók részére, birtokolni tudják a matematikai műveleteket, s tudják azokat a környezeti szituációkban is alkalmazni.

A jelentés kitér arra is, hogy a tehetségesebb tanulók számára ki kell bővíteni az alapprogramot új témák hozzávétele, illetve az előbbi témák elmélyítése révén. Igen fontos feladat a tehetségekkel való kiemelt foglalkozás már a kezdetektől fogva.

Részletesen elemzi a jelentés a vizsgák kérdését. Két alapelvet rögzítenek le:

1. A vizsgakérdéseknek és a vizsgáztatási módoknak olyannak kell lenniök, hogy arról tehessenek bizonyosságot, amit tudnak, és ne csak az derüljön ki, hogy mit nem tudnak.
2. Ügyelni kell arra, hogy a vizsga ne okozzon törést a tanulókban, ne veszítsék el az önbizalmukat, a saját erejükbe vetett hitüket a matematikai ismereteik alkalmazását illetően.

Az írásbeli vizsgák korlátozott időtartamúak, ezért nem alkalmasak olyan minősítések mérésére, mint a gyakorlati, illetve kutatómunka, kísérletek értelmes tervezése, kísérletek kiértékelése, értelmes megfigyelőképesség. Nem alkalmas a matematikai gondolkodásmód, következtetési képesség lemérésére sem.

A jelenlegi vizsgák csak a kitartást, az állhatatosság minőségét, a leleményességet tudják mérni, azt is csak korlátozott mértékben. A fenti minősítéseket csak a tanítás folyamán, hosszabb időn keresztül lehet megfigyelni.

Van az írásbeli vizsgáknak egy jelentős negatív hatása a matematikatanítás gyakorlatára. A tanárok az elmúlt évek vizsgafeladataihoz hasonló feladatokat trenírozzák óráról órára már jóval a vizsgák időpontja előtt, így háttérbe szorul a gyakorlati jellegű problémák megoldása, problémamegoldások, kutató, felfedező munkák.

A jelentés javasolja az évközi tanári értékelések, osztályzatok figyelembevételét a végső vizsgajegy megállapításánál, ez jobban tükrözné a már említett minőségi jellemzők színvonalát.

Külön kitér a jelentés a gyengébb tanulókkal való foglalkozásra. Nemcsak a formális számolási készségeket kell ellenőrizni, hanem olyan matematikaalkalmazási területeket is, mint bevásárlások, utazás, otthoni költségvetés, gazdálkodás, üdülés megszervezése. A számolási készséget ilyen kontextusba ágyazottan kell ellenőrizni. Javasolja a jelentés kutatómunkák beindítását a gyengébb tanulók fejlesztése érdekében.

Magasabbfokú középiskola (16—19 év)

E szinten a matematikai képzésnek figyelembe kell vennie nemcsak a további tanulmányokra való felkészítés fontosságát, hanem azokra a tanulókra is tekintettel kell lenni, akik közvetlenül nem folytatják tanulmányaikat. A fő feladat kialakítani a tanulókban a magasabb szintű tanulás képességét, ez fontos a munkába lépők számára is (továbbképzés, átképzés stb.).

Ezen az iskolafokozaton is ügyelni kell arra, hogy ne csak a tanári magyarázat, tanári előadás legyen az egyetlen oktatási

módszer. Igen fontos a feladatmegoldókészség fejlesztése, egyéni kutatómunka végzése, saját elképzelések, ötletek, megvitatása, átadása. Ezek révén is erősödik a tanulók önbizalma, saját erejükbe vetett hite a matematikai ismeretek alkalmazását illetően.

A hagyományos oktatás során a matematikai kurzus e szinten igen speciális, száraz kurzus volt, kevés kapcsolata volt az élettel, más tárgyakkal. Hangsúlyt kell helyezni a matematikai alkalmazásokra a társadalomtudományok területén is. (Matematikai modellalkotás bemutatása, elemzése.) Ezzel is nő a matematika jelentősége a tanulók szemében, érdekesebb lesz számukra.

Helytelen gyakorlatnak tartja a jelentés azt a szokást, hogy a matematikaoktatás során a tanulók nem olvasnak matematikai szakirodalmat, vagy csak nagyon keveset olvasnak. A matematikaoktatás során be kell vezetni a tanulókat a szakirodalom teljesen önálló tanulmányozásába, a szakkönyvtárak használatába.

Ügyelni kell arra, hogy szerepeljenek alkalmazott matematikai témák is a feldolgozandó anyagban, így reálisabb kép alakul ki a tanulókban a matematikáról. A valószínűségszámítás, statisztika, illetve a mechanika ilyen céllal szerepel a hivatalos tananyagban.

Felsőoktatás

A Cocroft-bizottságnak nem volt részletesebb feladata a felsőoktatás vizsgálata, ezért részletesebb vizsgálatot nem folytattak. Két problémát érintettek:

1. Mennyire készítik föl az egyetemi matematikai kurzusok a leendő matematikatanárokat?
2. Milyen veszteséget jelent, hány tanárjelölt „vész el" az egyetemi matematikai kurzusok túlzottan magas követelményei miatt?

A jelentés szerint a leendő tanárok matematikai felkészítésénél a következőket kell tekintetbe venni:

— a leendő tanároknak az iskolában tanítottól lényegesen magasabb szinten kell ismerniük és birtokolniuk a tananyagot, emellett bizonyos témákban való elmélyedést is biztosítani kell;
— a matematikai ismeretek által okozott örömérzet és a matematikai alkalmazások területén való önbizalom, hit fejlesztése;
— a matematikatörténeti irányzatok ismeretének fontossága;
— a matematika és más tárgyak kapcsolatának ismerete;
— a matematika átadási képességének fejlesztése — szóban és írásban is — szintén kiemelt feladat.

III.

A tanárképzés néhány kérdése

Függetlenül attól, hogy milyen szinten fognak tanítani a tanárok, széles látókörrel kell rendelkezniök, ismerniük kell a tanítandó programot, képesnek kell lenniük arra, hogy az egyetemi kurzusok egy-egy témakörében mélyebb tanulmányokat is folytassanak.

Célszerű olyan alapkurzus beindítása, amely széles áttekintést ad az iskolai matematika-tananyagról. Ez feltétlenül hasznosabb, mint néhány speciális területen való elmélyedés.

Angliában is probléma az alsó tagozatos tanítók matematikai képzettségének szintje, a matematikához való viszonya. A tanárképző intézményeknek ügyelni kell arra, hogy e hallgatók matematikához való hozzáállása pozitív irányba változzék, erősíteni kell matematikai ismereteiket, biztos alapot kell biztosítani a számukra.

Az iskolai oktatási gyakorlatok során az iskolai matematikatanári közösségeket és az iskolavezetést felelőssé kell tenni

a gyakorlat minőségéért, hasznosságáért. Ugyancsak fontos, hogy az egyes szakemberek együttműködjenek az iskolával a gyakorlat hatékonyságának emelésében.

A tanárok támogatása

Az egész jelentést áthatja egy olyan matematikatanítás szükségessége, amely alkalmazkodik a tanulók fejlettségi szintjéhez, előrehaladási üteméhez; amely sokoldalúan fejleszti a tanulók matematikai képességeit, amely biztosítja a megértést, a pozitív hozzáállást, a motivációt, a tanulói önbizalmat, s azt a tanulói meggyőződést, hogy matematikai ismereteiket a gyakorlati életben is tudják alkalmazni.

Kiemeli a jelentés annak fontosságát, hogy a tanárokat tanítási munkájuk során mindvégig segíteni kell, kapcsolatot kell biztosítani számukra más iskolák, illetve a felsőoktatási intézmények továbbképzési kurzusai felé, csak így várható el szakmai tudásuk bővítése, oktatónevelő munkájuk színvonalának emelése.

A matematikatanárok alapvető feladatai:

— Biztosítsanak lehetőséget minden tanuló számára, hogy azok adottságuk szerint fejlődjenek, a matematikai tudásuk a mindennapi élet, a munkahelyek, a további tanulmányok követelményei szerint fejlődjön, gyarapodjon, figyelembe véve az egyes tanulóknál előforduló nehézségeket.

— El kell látni a tanulókat olyan matematikai ismeretekkel, amelyek feltétlenül szükségesek más tantárgyak elsajátításához.

— Segíteni kell minden tanulót ahhoz, hogy értékelje és szeresse a matematikát, a matematikával való foglalkozás örömet okozzon neki, ismerje a matematikának a tudományban, a technikában és az egész civilizációban betöltött szerepét.

— Tudatosítani kell minden tanulóban, mennyire erős kommunikációs eszköz a matematika.

TÖRÖK TURUL
tudományos munkatárs
KFKI, Budapest

Angliai élmények és tapasztalatok

II. rész

Hogyan oktatnak?

Tankönyv nincsen a középiskolában, füzetet sem láttam. A tanári kézikönyv bizonyos oldalait fénymásolják, és azon dolgoznak a tanulók vagy üres lapokon. A szükséges eszközökből (tollak, körző, vonalzó, kalkulátorok stb.) az iskolának (osztálynak) vagy egy doboznyi. Ha valaki bármit otthon hagy, némi rosszallás mellett használja a „közöst", ami nemigen fogy el! A 11—12 évesek 8—12 oldalas könyvecskékből is dolgoznak, ezek az iskola tulajdonai, nem viszik haza őket.

Folyamatos számonkérés hiányában természetesen *osztályzás sincsen* — persze a két említett vizsga kivételével. Senki nem tartotta kizártnak, hogy mások vezetnek maguknak naplót, de önmagukkal kapcsolatban tagadtak mindennemű feljegyzést. Az igazi „naplóban" (alig nagyobb, mint egy ellenőrző könyv) valóban csak a jelen/távollétet regisztrálják. Szinte együtt élnek a pedagógusok a gyerekekkel, jól ismerik őket egyénenként is. Alkalmanként informálják a szülőket.

Házi feladat nagyon ritkán van, de soha nem torolják meg a hiányát (osztályzás nélkül nehéz is lenne!). Általában az hangzik el, hogy akinek kedve van, gondolkodhat azon is... befejezheti... letisztázhatja stb. Legközelebb mellé-

kesen megkérdi a tanár, ki mire jutott, majd vagy megbeszélik, vagy nem, de akik dolgoztak otthon, azok mindenképpen (szóbeli) dicséretet kapnak. Itt jegyzem meg, hogy a frieslandi iskolában a tanulók kedvenc tárgya a matematika volt, második helyen a mi „melléktárgyainkat" tömörítő zene-rajz-színjátszás-játék-torna állt, míg utolsóként a „tudomány"-t (fizika—kémia—biológia) nevezték meg.

Tőlünk nyugatabbra már közhely a kiscsoportos foglalkozás. Annyit tennék még hozzá, hogy az órákon a *tanulók a főszereplők,* a pedagógus sokszor meg se szólal hangosan, csak suttogva, pár szóval „irányít", nyugtáz, serkent. A tanulók egymás között tárgyalják meg a lehetőségeket, választják ki a legjobb megoldást. Elég sokat kérdeznek, szinte érzi az ember, ahogyan gondolkoznak, keresik a megoldást. Olyat alig láttam, hogy valaki bámulja a plafont, és „nem érti az egészet", vagy fogalma sincs, mit kellene csinálni. (Ha valaki(k) nem figyel(nek), azt elég látványosan teszi(k) . Nagyon fontos, hogy minden (rész)eredményről elég aprólékosan és igen éretten „jelentést" írjanak. (Azt is mondhatnám, hogy a számszerű eredménynél fontosabb az indoklása és a magyarázata!) A tanulók együttműködésének megítélésében nem az dominál, hogy másolhatnak egymásról, hanem az, hogy tanulhatnak is egymástól. A kiscsoportok létszáma 1—6 fő között szokott lenni.

Az óralátogatások során szinte zavart, milyen időbőségben dolgoznak. Ott mindig mindenre van idő. Úgy tűnik, a gyerekek általában addig dolgozhatnak a problémákon, amíg jólesik. Ezekután nem is meglepő, hogy mindig mindenre „maguktól" jönnek rá, elvégre a tanár „csak" jelen van! Állítólag az angol iskolások kiskoruktól ebbe szoknak (születnek?) bele.

Már többször említettem, de szeretnék még egyszer kiemelni egy alapvető különbséget. Angliában igen nagy hangsúlyt kap a matematika *alkalmazása.* Már említettem, hogy szinte minden feladat egy-egy történet, mindennapi esemény kiértékelése, kommentálása. Országaink nyelvoktatása között is sokáig az volt a(z egyik fő) különbség, hogy nálunk egy elvont szókincs, beszédstílus kerekedett a hétköznapi szituációk fölé. (Hasonlítsuk össze a pár évvel ezelőtti iskolai angol nyelvkönyveket, illetve például az IHB által használt „Opening Strategies" című művet!) Véleményem szerint ezek a „napi dolgok" igen fontos motivációs tényezők, elsősorban ez teszi számomra érthetővé a szigetországi matematika népszerűségét. Ugyanakkor azt is magyarázza, miért elégedettebbek az angol munkáltatók (egyetemek) az ottani ifjúság (szerintünk) „gyermetegebb", kevésbé alapos tudásával. Nos azért, mert igenis kötődik a mindennapi élethez, így *közvetlenül is használható* valamire. Még egy érvet említenék: A budapesti kétnyelvű gimnáziumban tanító két angliai (matematika, fizika) tanár is az alkalmazás hiányát tette leginkább szóvá („Mi értelme..."), és csak ezután említette például, hogy okosak a magyar diákok (akikről nem tudják, hogy kb. 20-szoros túljelentkezésből válogatták őket...).

Előzőkhöz hasonlóan fontos, hogy Angliában „csinálják" a matematikát, vagyis gyakran próbálgatnak (soha nem közlik velük előre a „jó" ötletet), és sok dolgot tapasztalati úton közelítenek! (12—15 éves korban is főszereplő a matematikórán az olló, a ragasztó; rengeteget rajzolnak, színeznek (euklidészi szerkesztés helyett!), amit például speciális hálós papírok támogatnak; különféle prospektusokból, kézikönyvekből kell optimalizálniuk; az általam látott „oktatóprogramok" is kizárólag ilyen „kísérlet- (próbálgatás-) centrikusak".

Vannak-e kísérletek?

Mindezek alapján részben már válaszoltunk is erre a kérdésre: nem túlzás

azt mondani, hogy az egész oktatás egy állandó, *folyamatos kísérlet*. Minden ismertebb egyetemen (Oxford, Cambridge, London, Nottingham, Southampton stb.) vannak, akik elsősorban azon spekulálnak, hogyan lehetne valamit még javítani. A hangsúly nem a „más"-ságon van, hanem a „próbáljuk ki így is" lehetőségén. Tehát úgy tűnik, nem elsősorban az alapelvekkel kapcsolatban kísérleteznek, hanem módszereket és „apróságokat" próbálnak módosítani. Egy kísérlet fő célja nem az addigi eredmények nevetségessé tétele, hanem minden jó beépítése esetleg némi változtatással.

A tanárok boldogan vesznek részt az ilyesmiben. Némelyik kísérleti tanári kézikönyv kipróbálását több mint tíz pedagógusnak köszönik meg. Az (egyik) érettségi házi dolgozat témájának, elbírálásának véglegesítésében pedig huszonöt iskola vett részt. Rengeteg ilyen kipróbálni való anyag „bolyong" az országban, és ezek halmaza, de az egyes elemek is gyorsan változnak. Ebből következően nagyon ritkán fordul elő, hogy valami már a megjelenésekor is elavult, vagy kompromisszumokkal gyengített.

Nem illik anyagi dolgok iránt érdeklődni, de az a gyanúm, az angol kísérletek *aránylag* olcsóbbak. Egyrészt, mert a kísérletezés nem rendkívüli esemény, hanem az élet alapvető, természetes közege (alig tűnik fel). Másrészt egy ésszerűen működő közegben történik, és körülményei is ésszerűek: semmi „különleges" igénye sincs! Minthogy nincsen hivatalos tankönyv, nem tűnik luxusnak, hogy egyszerre 10—12 *tanári könyv* létezik, és ki-ki azt használja, amelyiket szereti (persze lehet egyszerre többet is!). Egy módosítás csak annyit jelent, hogy ezentúl másik könyvből kell fénymásolni az órához szükséges 2—3-szor 15—25 oldalt a tanulók számára.

Érdekes például az egyik ilyen kísérleti könyv története. Az 1982-es Cockroft jelentés* után (hatására) kezdtek szinguláris feladatokon dolgozni, majd ez 85-re tapasztalatokat, tanári véleményeket is tartalmazó könyvvé állt össze. Először *néhány* példányban készült, az iskolák (pedagógusok) véleményezésre kapták. Utána kb. ötven példány kezdett cirkulálni, majd tavaly már kereskedelmi forgalomba került, és ezzel a kb. 12 fős szerzőgárda „levette róla" a kezét. Kicsit még vitatkoznak róla (publikációk), de inkább újabbakon dolgoznak. Pillanatnyilag további öt anyaguk áll a megjelenés után a kereskedelmi forgalom előtt!

Egy módszer hatásfokának, jóságának elsőszámú mércéje a *munkáltatók* véleménye. Ez azt jelenti, hogy a nagyobb cégek állandóan informálják az iskolákat a tanulók „beilleszkedéséről": menynyire elégedettek a munkaerő (alap)képzettségével, tudásával. (Ezt persze a magasabb iskolák is mindig visszajelzik a „kapott" gyerekekre vonatkozóan.) Ezek a jelzések nemcsak az iskola munkáját minősítik, hanem a kísérletek terjedését is alapvetően meghatározzák.

Ugyancsak befolyásolja a próbálkozások sorsát, hogyan fogadják a szülők, sőt a gyerekek. Az utóbbiaktól való „függést" könnyű elintézni az angol társadalom feltűnő gyerekcentrikusságával. Az érdeklődő szülőket pedig rendszeresen megismertetik a pillanatnyi anyaggal: a szülői értekezleten pl. a felnőttek elsősorban gyerekeik feladataiból kapnak ízelítőt: ezeket oldogatják meg — nagy élvezettel. Végül Angliában a minisztérium vagy a kormány egyáltalán nem szól bele szakmailag egy kísérletbe — minthogy tudja magáról, hogy nem ért hozzá annyira, mint a kísérletezők. Ez azt is jelenti, hogy a „bevezetéséről" sem

* 1982-ben szinte az egész angol társadalmat megrázta az említett tanulmány vészjósló híre, miszerint — többek között — a matematika oktatása nem a legtökéletesebb. A tanulmány szerint a fő hiba elsősorban az agyonformalizált, túlabsztrahált matematika térhódítása, és az alkalmazás, a megszerettetés hiánya. Azóta a jelentésre való hivatkozás a megújulás szinonimája lett a szigetországban.

dönt (persze ilyen tanári, iskolai önállóság mellett furcsa is lenne).

Végül megkérdeztem, vajon miért megy valaki tanárnak Angliában. Első helyen szerepelt, hogy ez egy biztos (állami) állás, nem fenyeget munkanélküliség. Szorosan a második helyen az állt, hogy érdekes az emberekkel (gyerekekkel) foglalkozni, valamint az önmegvalósításhoz való vonzódást említették. További (jóval lényegtelenebb) tényezők voltak, hogy közel volt a tanárképző egyetem (főiskola), nem rossz a fizetés, nem kevés a szabadidő stb.

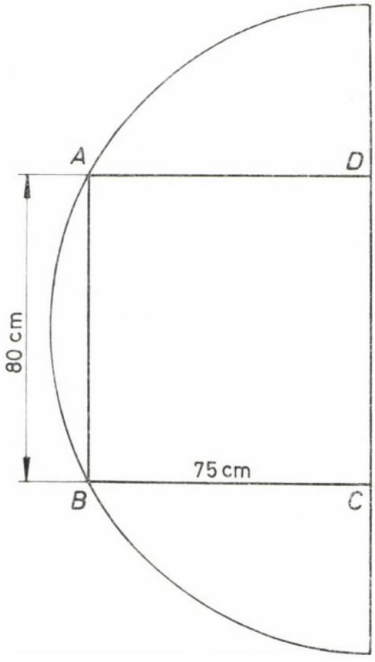
Az alábbi „komolyabb kérdések" a múltkor említett érettségi dolgozat második harmadát (35%) tették ki 1978-ban Oxford és Cambridge környékén. A válaszokhoz piszkozat is használható, de beadni csak a tisztázatot kell. Ebben a dolgozatban *fontos az indoklás,* a megfelelő (tanult) módszerek használata. Logarléccel (ma persze már kalkulátorral) elérhető pontosság elegendő, hacsak nem jelezzük az ellenkezőjét. 150 percig lehet dolgozni, és ezalatt 4+4 feladatot kell megoldani.

A rész. Mind a négy feladat megoldandó.

1. Egy 80 cm×75 cm-es szőnyeget (amely lefedi az *ABCD* téglalapot), egy félkör alakúl takaróva helyettesítünk.

i) Egyik javaslat szerint az a cél, hogy a félkör alakúba éppen beleférjen az *ABCD* téglalap, miként ábránk mutatja. Mi legyen ekkor a szőnyeg sugara?

ii) Másrészt keressünk olyan félkör alakú terítőt, amelyiknek ugyanakkora a területe, mint a téglalap alakúé. Mutasd meg, hogy ekkor a sugár hossza $\sqrt{12\,000/\pi}$ cm és számítsd ki ezt az értéket!



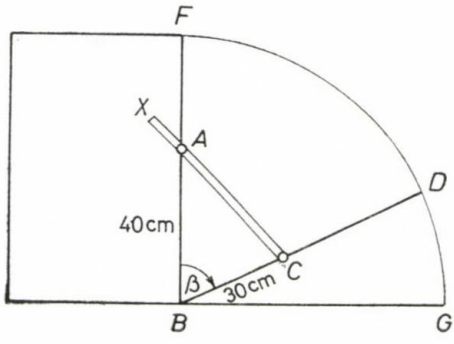
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Számítsd ki AB szorzatot!

ii) Egy X mátrix transzponáltját (X') úgy kapjuk, hogy X sorait és oszlopait felcseréljük, azaz írd fel A'-t, és számold ki $B'A'$-t!

iii) Mi a kapcsolat $B'A'$ és AB között?

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$



3. *Ezt a feladatot négyzethálós papíron oldd meg!*

Az ábrán egy falra szerelt konyhai munkaszekrény látható. *BCD* lehajtható munkalapot az *XC* fémszalag segítségével mozgathatjuk: az *A* jelű szegecsen (ami a szekrény oldalába van erősítve) csúszkálhat a fémszalag. $BC = 30$ cm, $AB = 40$ cm, $CX = 50$ és ABC szög $= \beta$.

Zárt helyzetben D és X pont egyaránt egybeesik F ponttal. Teljesen nyitott helyzeten $\beta=90°$, D és G pont egybeesik és X pont is azonos A ponttal.

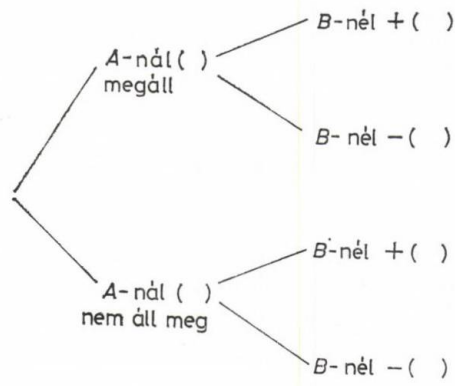
i) Mi a hossza BD-nek?

ii) *a)* 1:5-ös léptéket használva, rajzold le FAB vonalat! Jelöld meg X és C pont azon helyzeteit, amikor $\beta=0°$; 5°; 15° és 60°.

b) Vázold ugyanezen ábrán X pont mértani helyét!

iii) Méréssel állapítsd meg a szekrény minimális mélységét!

4. Egy tanár az iskolába vezető útján két jelzőlámpás csomópontot érint (A és B). 2/7 és 1/6 valószínűséggel állítják meg a piros jelzések, ezzel 1, illetve 3 perces késedelmet okozva. Ha egyik lámpánál sem kell megállnia, 30 percig tart az útja.



i) Másold le és egészítsd ki a fadiagramot, a zárójelekben jelezd a megfelelő valószínűségeket!

ii) Találd meg a valószínűségét, hogy

a) az út nem hosszabb 30 percnél,

b) a tanár csak egyszer áll meg!

iii) Egy reggel 32 perccel kezdés előtt indul. Mi az esélye, hogy el fog késni?

B rész. Elég csak *négy kérdéssel* foglalkoznod az alábbiak közül.

5. *Az alábbiak négyzethálós papíron válaszolandók*

Egy 40 tagú klub kirándulását kell megszervezni, bérelt kocsikkal. Kétféle jármű bérelhető: 4 és 5 személyes autók 10 és 12 fontért.

i) Ha x és y a megfelelő típusok száma, írd fel azt az egyenlőtlenséget, ami $x=0$ és $y=0$ mellett tetszőleges kirándulást jellemez.

ii) A kölcsönadó cég ragaszkodik ahhoz, hogy legalább annyi kis kocsit béreljenek, mint ahány 5 személyest. Tíz fő, akiknek nincs jogosítványuk, kényelmi okokból nagy kocsival kívánnak menni. Írd fel az ezeket kifejező két további egyenlőtlenséget!

iii) 1 cm-nek véve egy egységet mindkét tengelyen, ábrázold az egyenlőtlenségeidet. Satírozd be azokat a tartományokat, ahol nem teljesülnek a feltételek!

iv) *a)* Írd fel a kölcsönzés költségét x, y függvényében!

b) Írd fel a minimális költséghez tartozó járművek számát!

c) Mennyi lesz ez esetben a költség?

6. $f: x\mapsto x^2-9$, $g: x\mapsto x+1$.

i) Számítsd ki $f(3)$, $g(-8)$, $fg(2)$ értékeket!

ii) Bontsd tényezőkre p^2-q^2 kifejezést! Ennek segítségével (vagy másképpen) írd fel fg függvényt az $fg: x\mapsto(x+a)(x+b)$ alakban!

iii) Oldd meg az $fg(x)=0$ egyenletet, és vázold egy grafikonon, hol metszi az $y=fg(x)$ görbe a tengelyeket! Tüntesd fel ezen pontok koordinátáit!

7. *Az egész feladat négyzethálós papíron oldandó meg*

Egy E szimmetrikus (egyenlőszárú) háromszög csúcsai a következők: $A(0;5)$, $B(-1;8)$ és $C(4;8)$.

i) 1 cm-nek véve egy egységet, rajzold meg az x tengelyt -2 és 14, illetve az y tengelyt 0 és 16 között. Rajzold meg E háromszöget, és jelöld a csúcsokat!

ii) S transzformáció a következő:

$$S:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

a) Rajzold meg $S(E)$ háromszöget és $S(A)$ pontot, és hajtsd végre a megfelelő elnevezéseket!

b) Írd le részletesen S transzformációt!

iii) U transzformáció:

$$U:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1,\ 2&1,\ 6\\1,\ 6&1,\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

Rajzold meg és jelöld $U(E)$ háromszöget és $U(A)$ pontot!

iv) Írd le azt a geometriai transzformációt, amelyik $U(E)$ háromszöget $S(E)$-be viszi, és eközben $U(A)$ képe $S(A)$ lesz!

8. Egy turista meg szeretné becsülni egy torony h magasságát, és a körülötte húzódó árok d szélességét. C pontból elsétál A pontba az árok szélén, és eközben F pontnál 45°-ra becsli a látószöget, amely alatt a torony T csúcsa látszik. Ugyanez A pontból 60°-nak látszik. AB távolságot méterre kerekítve 16 méternek méri.

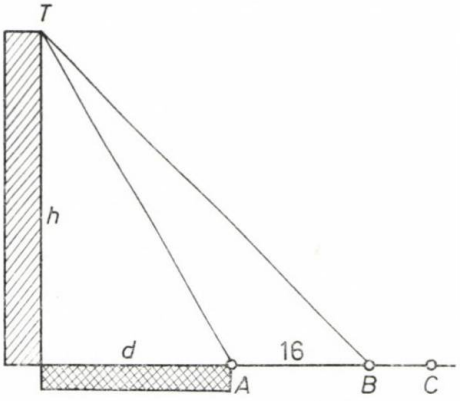
i) Írj fel két kifejezést h-ra d segítségével!

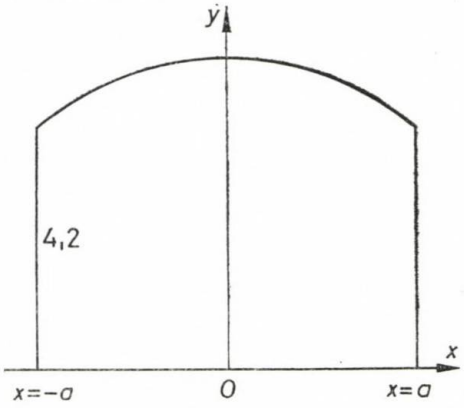
ii) Ezekből számítsd ki h és d értékeit!

iii) A közeli turistairodánál érdeklődésére elmondják, hogy a torony magassága 40 m és az árok szélessége 25 m.

a) Számítsd ki az A pontnál levő látszög pontos értékét!

b) Add meg a magasságra vonatkozó becslésed hibaszázalékát!





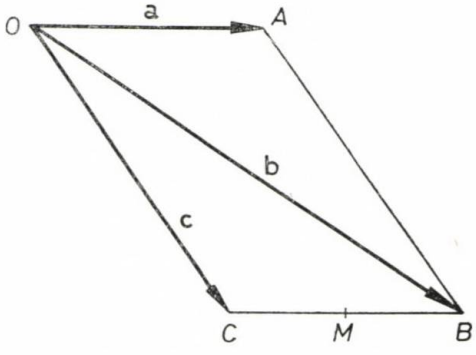
9. *Négyzethálós papíron dolgozz!*

Az ábra egy 200 m hosszú alagút keresztmetszetét mutatja. Az oldalfalak 4,2 méter magasak, a tető alakját az $y=6-0{,}2x^2$, $-a \leqq x \leqq a$ egyenlet adja.

i) Állapítsd meg a tető maximális magasságát, és add meg a értékét!

ii) 2 cm-nek véve egy métert, rajzold meg a metszetet!

iii) Hat darab egyenlő alapú trapéz segítségével becsüld meg a metszet területét, és ennek alapján mennyi az alagút (belső) térfogata!



10. $OABC$ egy paralelogramma. M a BC oldal felezőpontja. A, B, C pontok helyvektorai **a**, **b**, **c**. O az origó.

i) **b** és **c** vektorok segítségével fejezd ki az alábbi vektorokat: OB, OM, OM!

ii) *a)* Fejezd ki AM vektort **a**, **b** és **c** segítségével!

b) P pont (nincs rajta az ábrán), **p** helyvektorral a következő: $AP=2/3AM$. Fejezd ki AP-t **a** és **P** vektorból, és bizonyítsd, hogy **p** vektor felírható $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})/n$ alakban, ahol n egész szám.

iii) Felhasználva, hogy $\mathbf{b}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$, fejezd ki **p** vektort kizárólag **b** vektorból. Mondj valamit P pont helyzetéről!

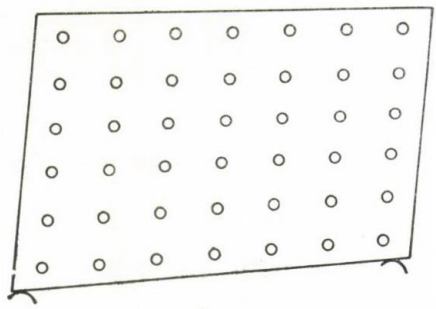
Az alábbi feladat Közép-Angliában az egyik házi dolgozati példa volt 1988-ban a három közül. Ez egy tipikus „általános vizsgálódás".

Négyet egy vonalba!

Ez bármely korosztály nagyon népszerű játéka. Hat sor (keresztbe) és hét oszlop (lefelé) van egy normális játék esetében.

Ketten játsszák, felváltva ejtik saját színű korongjaikat a táblába. A korong függőlegesen leesik annak az oszlopnak az aljára, ahová betettük. Egy korong végső helyzete tehát függ attól, hány

korong volt már előtte az oszlopban. Az a játékos nyer, aki elsőként gyűjt négy saját korongot egymás mellé, egy vonalba. Ez a vonal egyaránt lehet vízszintes, függőleges vagy átlós.



— Vajon hány különböző nyerő lehetőség adódhat a játékban?

— Milyen ötletek jutnak még eszedbe erről a játékról?

— Hogyan tudnád megváltoztatni a játékot (a szabályokat)?

Dolgozz ki minél több lehetőséget, de közben készíts feljegyzéseket, hogy a végén minél könnyebb legyen megírnod a dolgozatot! Ez az egész munka jelentős része a vizsgádnak, így igyekezz, hogy tükrözze minden fontosabb ötletedet, gondolatodat. Mélyedj el a problémában!

A fenti szöveget egy 114 oldalas tanári kézikönyvből fénymásolva minden gyerek megkapja. Órákon kezdenek dolgozni, majd otthon folytatják. Az említett könyv tíz oldala a pedagógusnak konkrét támogatást ad a vizsgához az alábbiak szerint:

— Bátorítsuk a tanulókat, hogy játsszanak egymással néhányszor. Hozzanak otthonról saját játékot (táblát). Léteznek számítógépes változatok is!

— Lehetőleg a munka minden szintjén (kezdet, különböző kérdések megfogalmazása, válaszadás, indoklás, összegzés) váltakozzon az iskolai és otthoni munka.

További kérdések

A valódi játék során (amikor a tanulók valóban játszanak egymás ellen) merülhet fel:

— Kezdéskor mi számít jó helynek, és mi kevésbé jónak?

— Van-e kitüntetett irány a nyerés szempontjából (amire különösen érdemes törekedni)?

— Mikor játszik jól valaki? (Jellemezd a jó játékos tényekedését!)

— Lehet-e döntetlen: amikor előbb telik be a tábla, minthogy bárki is nyerne?

— Kezdeni kedvező, avagy kedvezőtlen?

Egyéb kérdések, melyek tanulmányozására buzdítani lehet/kell a tanulókat:

— Általánosítsuk $M \times N$-es táblára! Hány lehetséges nyerő állás van?

— Keress nyerő stratégiát! — Próbálkozz 3 dimenzióban!

— Keress állításokat valószínűségekkel kapcsolatban!

— Mi van, ha nem négyet, hanem K-t kell egymás mellé tenni a nyeréshez? Mi a véleményed $K=3$-ról?

— Hasonlítsd össze más (ismert) játékokkal!

— Változtasd meg a szabályokat! Pl. Othello-jelleg: közrefogott ellenséges korongok színe megváltozik stb.

— Vizsgáld a játék szimmetriáját! — Szervezz osztálybajnokságot!

— Hányféle (végső) állás létezik? — Változtasd a tábla alakját!

Minden tanuló annyi kérdést érint, amennyit kíván!

Többször is figyelmeztessük a tanulókat, hogy jegyzeteljenek, írjanak állandóan. A legjobb ötlet is könnyen feledésbe merül!

Az órai közös megbeszélések kizárólag az ötletekre, kérdésfelvetésekre vonatkozzanak, ilyenkor a tanár legyen semleges. A tanár ne segítsen többet annál, minthogy jelezze a diáknak, ha a választott (rész)feladatát nehéznek tartja. Soha ne avatkozzon bele, csak jelezzen!

Fenti kérdéseket ne mutassa meg a tanulóknak, csak hasonlókra tegyen *általános* (kicsit homályos) javaslatot.

Ugyanakkor mindig buzdítsuk a diákokat általánosításra! (Például: más méretű tábla, de ne mondjuk, hogy $M \times N$-es; más alakú mező, de ne mondjuk, hogy pl. háromszög stb.).

A 114 oldalas kézikönyv további 26 oldala alternatív feladatokat tartalmaz fentihez hasonló, de rövidebb útmutatással: ezek (megelőző) gyakorlásul szolgálnak, de nyugodtan választhatók a fenti *helyett* az érettségire is.

1. *Bélyegek.* Címletezés bélyegekkel. Hogyan kell feladni egy levelet? Hol lehet bélyeget venni? Mondj olyan problémát, ami hasonlít ehhez a címletezéshez!

2. *Háromszög gyűjtemény.* Az oldalak egész számok és 7-nél nem nagyobbak. Hány ilyen van? És ha minden oldala különböző? Milyen alakúak lehetnek? Mértani helyek? Ugyanez szögekkel? Pithagoraszi hármasok.

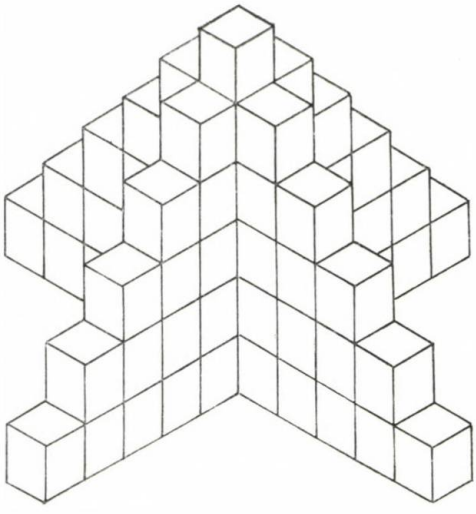
3. *Négyzetek.* Téglalap négyzetekből. Négyzetrács rajzolása közben minél kevesebbszer emeljük fel a ceruzát. Rajzoljunk 3 egységnyi darabokkal. Egy vonallal megrajzolhatóság. Találj szabályokat a fentiekre.

4. *Rakd ki!* Szabályos háromszög rácson területmérés. Összefüggés a hatszög oldalai és területe között. Majdnem szabályos hatszögek. Ugyanez négyzetrácson nyolcszögekkel.

5. *Pöttyös sokszögek.* Nagyon hosszú lenne részletezni, ez parkettázással elegyítve egy legalább 50 órás anyagrész szintézise. Előzőhöz kicsit hasonlít, tetszőleges (konkáv is) sokszögek területét mérik négyzethálós papíron, villámgyorsan, egy nem bizonyított algoritmussal.

6. *Láncszámolás.* Különböző láncszámolások (pl. egyesek kétszerese+tízesek, számjegyek összege" előző két szám összegéből csak az utolsó jegy stb.) részeredmények sorozata. Periodicitás, szabályok. Érdekes sorozatok, érdekes kezdések.

A könyv utolsó 70 oldalán az eredeti játékról írott hat különböző szintű dolgozatot közlik, kommentálva. Ezekből lehetetlen röviden idézni, hiszen lényegük az egyenletes érvelés, a gondolatok folyamatos kapcsolódása.



Két további „általános vizsgálódás"

1. *a)* Hány kis kockából építhető meg az itt látható torony?

b) Hány kockára van szükség egy hasonló toronyhoz, amelynek magassága 12 kocka?

c) Magyarázd el, hogy jött ki az előző kérdés eredménye!

d) Hogyan számolnád ki egy N magasságú torony építőköveinek számát?

2. Tekintsük a 2, 5, 1, 4, 3 sorozatot. Növekvő sorrendbe szeretnénk rendezni az öt számot. Ehhez mindig a sorozat elejétől számított valamennyi tagot megfordítjuk. Például:

2, 5, 1, 4, 3 első négy elemét fordítva kapjuk: 4, 1, 5, 2, 3
4, 1, 5, 2, 3 első három elemét fordítva adódik: 5, 1, 4, 2, 3
5, 1, 4, 2, 3 mind az öt tagot változtatva: 3, 2, 4, 1, 5
stb.

a) Írd le a változtatások azon sorozatát, amely az alábbi sorozatokat (növekvő sorrendbe) rendezi:

i) 2, 3, 1 ii) 4, 2, 3, 1 iii) 7, 2, 6, 5, 4, 3, 1

b) Próbálj valamilyen szabályszerűséget találni a fordítások számára. Ne speciális sorozatokból indulj ki, igyekezz általános törvényeket megfogalmazni.

Dr. WOLFGANG DÖRBAND
Greifswald
NDK

A trigonometria legismertebb tételeinek levezetése a háromszög normálisainak tételéből és a tetraéderre való általánosítás

II. Trigonometria és a tetraéder

(Fordította: Dr. Szabó József, Debrecen)

(A cikk I. része az 1989. évi 3. számban jelent meg)

1. Trigonometria

A trigonometria főbb tételei: a szögekre vonatkozó tételek, a cosinustétel, a Pitagorasz-tétel, az oldalak merőleges vetületeiről szóló tétel, a sinustétel. Ezeket a tételeket mind az első részben tárgyalt ún. normálisok

$$a \cdot \mathbf{N}_a + b \cdot \mathbf{N}_b + c \cdot \mathbf{N}_c = 0 \qquad (1)$$

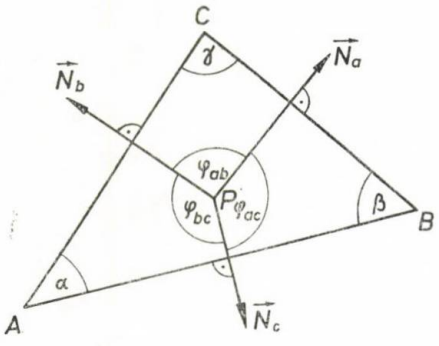
tételből fogjuk levezetni.

1.1. *A szögekről*

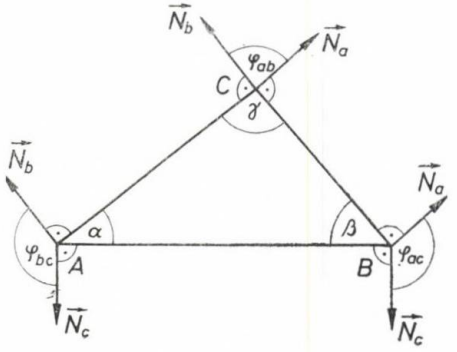
Indítsuk ki az *ABC* háromszög normál egységvektorait a háromszög egy belső *P* pontjából *(1. ábra)*. Ekkor az alábbi szögeket definiáljuk:

$$(\mathbf{N}_a, \mathbf{N}_b) = \cos \varphi_{ab}; \quad (\mathbf{N}_a, \mathbf{N}_c) = \cos \varphi_{ac}; \quad (\mathbf{N}_b, \mathbf{N}_c) = \cos \varphi_{bc} \qquad (2)$$

A φ_{ab} szárai merőlegesek a γ száraira. Ezért φ_{ab}-t és γ-t egymás poláris szögének nevezik.



1. ábra



2. ábra

Az 1. ábráról egyszerűen leolvashatjuk, hogy

1. tétel

ha

$$\alpha+\beta+\gamma = \pi,$$

akkor

$$\varphi_{ab}+\varphi_{ac}+\varphi_{bc} = 2\pi. \tag{3}$$

A *2. ábráról* a szögek és a polárszögek kapcsolatára:

2. tétel:

$$\varphi_{ab}+\gamma = \pi; \quad \varphi_{ac}+\beta = \pi; \quad \varphi_{bc}+\alpha = \pi. \tag{4}$$

A háromszög normálisaira és szögeire tehát fennáll:

$$(\mathbf{N}_a, \mathbf{N}_b) = -\cos\gamma, \quad (\mathbf{N}_a, \mathbf{N}_c) = -\cos\beta, \quad (\mathbf{N}_b, \mathbf{N}_c) = -\cos\alpha \tag{5}$$

Az első és második tételből adódik, hogy

3. tétel:

$$\alpha+\beta+\gamma = \pi. \tag{6}$$

Később be fogjuk látni, hogy a tetraéderre az előzőek analóg relációi nem teljesülnek.

1.2. *Cosinustétel*

Az (1) formulát így is írhatjuk:

$$-c\cdot\mathbf{N}_c = a\cdot\mathbf{N}_a+b\cdot\mathbf{N}_b.$$

A két egyenlő vektort szorozzuk skalárisan a $-c\cdot\mathbf{N}_c$ vektorral, éspedig úgy, hogy a baloldalt ténylegesen a $-c\cdot\mathbf{N}_c$ vektorral, míg a jobboldalt a vele egyenlő $a\mathbf{N}_a+$ $+b\mathbf{N}_b$ vektorral szorozzuk. Ekkor kapjuk, hogy:

$$c^2 = a^2+b^2+2ab(\mathbf{N}_a, \mathbf{N}_b) \tag{7}$$

és az (5)-ből:

4. tétel (cosinustétel):

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma. \tag{8}$$

1.3. *Pitagorasz tétele*

A cosinustételből rögtön kapjuk:

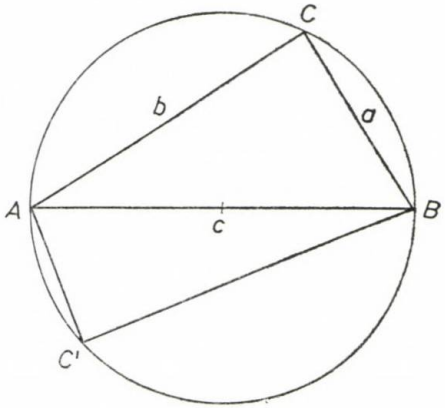
5. tétel (Pitagorasz-tétel):

$a^2+b^2=c^2$, akkor és csakis akkor, ha

$\gamma=\pi/2.$ (9)

Rögzítsük az ABC háromszög A és B csúcsait, C pedig legyen futópont. Hol vannak a C pontok, ha $a^2+b^2=c^2$ fennáll? A válasz a Thalész-tételt adja, azaz:

C az AB átmérőjű körön van *(3. ábra)*. (10)



3. ábra

1.4. *Vetületi tétel*

Szorozzuk a $-c\mathbf{N}_c = a\mathbf{N}_a + b\mathbf{N}_b$ egyenlet mindkét oldalát $-\mathbf{N}_c$-vel és vegyük figyelembe (5)-öt is, akkor kapjuk

6. tétel (vetületi tétel):

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha. \tag{11}$$

1.5. *Sinustétel*

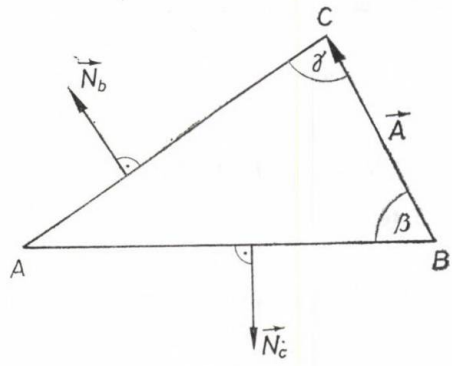
Legyen **A** az a vektor, amely a $B=(B_x; B_y)$ csúcspontot az $C=(C_x; C_y)$ csúcspontba viszi, tehát $A=(C_x-B_x; C_y-B_y)$. Akkor $|\mathbf{A}|=a$ és $(\mathbf{A}; \mathbf{N}_a)=0$. Szorozzuk (1)-et skalárisan **A**-val, ekkor kapjuk, hogy

$$b(\mathbf{N}_b, \mathbf{A}) + c(\mathbf{N}_c, \mathbf{A}) = 0. \tag{12}$$

A *4. ábrából* láthatjuk, hogy: $\mathbf{N}_b$ és **A** szöge $\gamma-\pi/2$, vagy $\pi/2-\gamma$. A (12)-beli skaláris szorzatok:

$$(\mathbf{N}_b, \mathbf{A}) = a\cos(\gamma-\pi/2) =$$
$$= a\cos(\pi/2-\gamma) = a\sin\gamma$$
$$(\mathbf{N}_c, \mathbf{A}) = a\cos(\pi/2+\beta) = -a\sin\beta. \tag{13}$$

(12) és (13) együtt adják:



4. ábra

7. tétel (sinustétel):

$$b\sin\gamma = c\sin\beta. \tag{14}$$

2. Tetraéder

Az (1)-hez analóg tétel tetraéderre:

$$F_0\mathbf{N}_0 + F_1\mathbf{N}_1 + F_2\mathbf{N}_2 + F_3\mathbf{N}_3 = 0. \tag{15}$$

Hasonló módon, mint ahogyan azt az előbbi fejezetben tettük, és a háromszögre a trigonometria több tételét levezettük, a (15)-ből analóg tételeket akarunk nyerni a tetraéderre. Meg fogjuk mutatni, hogy ez egyrészt lehetséges, másrészt kiderül, hogy a tetraéderből ezen az úton több eredmény kapható meg, mint azt a háromszögből gondolnánk.

2.1. *A szögekről*

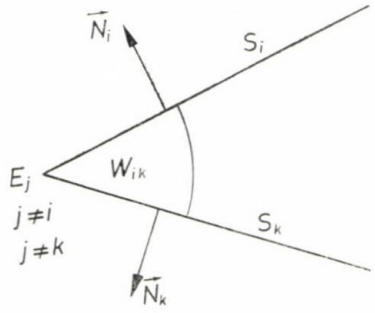
A tetraéderen háromféle szögtípust különböztetünk meg.
(I) W_{ik}=Az S_i és S_k oldallapok által bezárt *lapszög*. (S_i a 0, 1, 2, 3 csúcspontú tetraédernek az a lapja, amelyik nem tartalmazza az i csúcspontot.) *(5. ábra.)* A W_{ik}-t az (5)-höz analóg módon definiálhatjuk:

$$(\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_k) = \cos(\pi - W_{ik}) = -\cos W_{ik}. \tag{16}$$

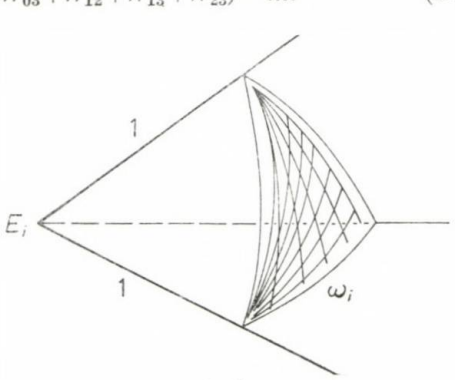
Természetesen $W_{ik}=W_{ki}$.
(II) Ω_i=Az i csúcspontú triéder mint *térszög*. Pl. Ω_0-t az S_1, S_2, és az S_3 lapok képezik. A térszöget szférikus mértékkel mérhetjük. A térszög csúcsa az egységsugarú gömb középpontja. A gömb és a triéder metszete egy gömbháromszög; ennek a területe lesz a térszög mértéke *(6. ábra)*. A térszögekre:

$$\Omega_0 = W_{12}+W_{13}+W_{23}-\pi, \qquad \Omega_2 = W_{01}+W_{03}+W_{13}-\pi,$$
$$\Omega_1 = W_{02}+W_{03}+W_{23}-\pi, \qquad \Omega_3 = W_{01}+W_{02}+W_{12}-\pi.$$

$$\Omega = \sum_{i=0}^{3} \Omega_i = 2(W_{01}+W_{02}+W_{03}+W_{12}+W_{13}+W_{23})-4\pi. \tag{17}$$



5. ábra



6. ábra

8. tétel:

A tetraéder térszögeinek Ω összege nem konstans, hanem

$$0 \leqq \Omega \leqq 2\pi. \tag{18}$$

E tény illusztrálására három példát mutatunk be.

(1): $E_0 = (0; 0, h)$, $E_1 = (1; 0; 0)$, $E_2 = (-1; 1; 0)$, $E_3 = (-1; -1; 0)$

(7. ábra). Ha h tart 0-hoz, akkor $W_{12}, W_{13}, W_{14} \to \pi$ és $W_{01}, W_{02}, W_{03} \to 0$.

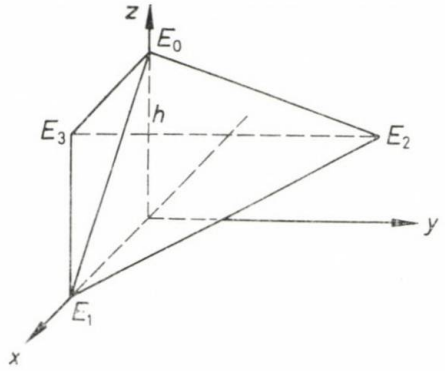
$$\Omega_i \to \begin{cases} 2\pi, & \text{ha} \quad i = 0, \\ 0 \text{ egyébként}, \end{cases} \qquad \text{tehát} \quad \Omega \to 2\pi.$$

(2): $E_0 = (0; -1; 0)$, $E_1 = (0; 1; 0)$, $E_2(1; 0; h)$, $E_3 = (-1; 0; h)$

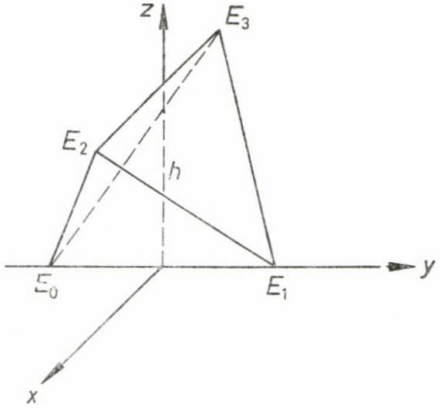
(8. ábra). Ha h tart 0-hoz, akkor $W_{01}, W_{23} \to \pi$, és $W_{01}, W_{02}, W_{12}, W_{13} \to 0$.
Minden $\Omega_i \to 0$, $\Omega \to 0$.

(3.): A szabályos tetraéder minden oldallapjának egyenlő F_i területe van és a (15) összefüggést a felületi normális egységvektorok skaláris szorzatával pl. így kifejezhetjük:

$$1+(\mathbf{N}_0, \mathbf{N}_1)+(\mathbf{N}_0, \mathbf{N}_2)+(\mathbf{N}_0, \mathbf{N}_3) = 0.$$



7. ábra



8. ábra

A szimmetria miatt a skaláris szorzatok mind egyenlők, és a lapszögek is, tehát (16) szerint $\cos W_{ik} = 1/3$. $W_{ik} = 70{,}53° = 1{,}23$ radián. (17)-ből:

$$\Omega = 12 W_{ik} - 4\pi = 2{,}2 \quad \text{gömbi radián.}$$

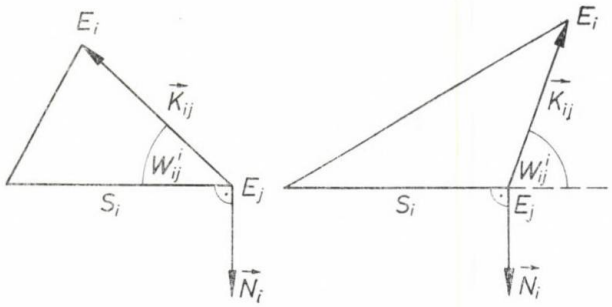
Az Ω_0 triéder, amelyen az $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$ normálvektorok határoznak meg, az Ω_0 polártetraédere, mert $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$ élei merőlegesek az Ω_0 S_1, S_2, S_3 oldallapjaira. A négy polártetraéder kitölti az egész teret, tehát

9. tétel:

A polártetraéder gömbi szögeinek összege 4π.

$$\Omega' = \Omega'_0 + \Omega'_1 + \Omega'_2 + \Omega'_3 = 4\pi. \tag{19}$$

Ez a tétel a (3) természetes általánosítása tetraéderre, miközben a (6) párja nem érvényes, mint azt példákon bemutattuk.



9. ábra

(III) Legyen $W_{ij}{}^i$ az S_i oldallap és a „szemközti" K_{ij} él szöge. A *9. a)* és *9. b) ábrákon* $\mathbf{K}_{ij}$ az E_j pontból az E_i pontba mutató élvektort jelenti. Hogy az $(\mathbf{N}_i, \mathbf{K}_{ij})$ és $(\mathbf{N}_j, \mathbf{K}_{ij})$ skaláris szorzatokat kiszámítjuk, a következő meggondolásokat tesszük: Az S_i oldal a teret két féltérre osztja. E_i nincs az S_i oldalon, tehát a félterek valamelyikében van. Ezért az $\mathbf{N}_i$-nek, a testből kifelé mutató normálvektornak a másik féltérbe kell mutatnia. A szögek így olyanok, amint azokat a *9. a)* és *9. b) ábrákon* látjuk, ezért:

$$(\mathbf{N}_i, \mathbf{K}_{ij}) = |\mathbf{K}_{ij}| \cos(\pi/2 + W_{ij}^i) = -|\mathbf{K}_{ij}| \sin W_{ij}^i, \tag{20}$$

$$(\mathbf{N}_j, K_{ij}) = -(N_j \mathbf{K}_{ji}) = |K_{ji}| \sin W_{ji}^j, \tag{21}$$

$$0 < W_{ij}^i \leqq \pi/2.$$

Az a kérdés, hogy a $W_{ij}{}^i$ szög belső, mint a *9. a) ábrán*, vagy külső, mint a *9. b) ábrán* most nyitva marad. A számolásnál arra kell ügyelni, hogy a normálvektor indexe az élvektor első vagy második indexével megegyező legyen, mert ha 1 nem egyenlő i-vel vagy j-vel, akkor $(\mathbf{N}_1, \mathbf{K}_{ij}) = 0$, mivel az élvektor az S_1 síkban fekszik.

2.2. *Cosinustétel*

A (15) szerint

$$-F_0 \mathbf{N}_0 = F_1 \mathbf{N}_1 + F_2 \mathbf{N}_2 + F_3 \mathbf{N}_3. \tag{22}$$

Skaláris négyzetre emelés után és (16) figyelembevételével:

10. tétel (cosinustétel a tetraéderre):

$$F_0^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 - 2F_1F_2 \cos W_{12} - 2F_1F_3 \cos W_{13} - 2F_2F_3 \cos W_{23}. \tag{23}$$

A kifejezés analógiája a (8)-cal nyilvánvaló. A (22) helyett (15)-ből más alakot is

kaphatunk.

$$-F_0\mathbf{N}_0-F_1\mathbf{N}_1=F_2\mathbf{N}_2+F_3\mathbf{N}_3. \tag{22'}$$

Ha ezt emeljük négyzetre, akkor:

$$F_0^2+F_1^2-2F_0F_1\cos W_{01}=F_2^2+F_3^2-2F_2F_3\cos W_{23}. \tag{23'}$$

Ez is egy cosinustétel a tetraéderre. Az összes relációt, amelyek eredményt tekintve különbözőek, itt most nem diszkutáljuk. Mellékesen azonban mégis megemlítjük, hogy háromszög esetén hasonló dolgokat nem vizsgáltunk, nem vezettük le pl., hogy

$$a^2+b^2+c^2=2ab\cos\gamma+2ac\cos\beta+2bc\cos\alpha.$$

2.3. *Pitagorasz-tétel*

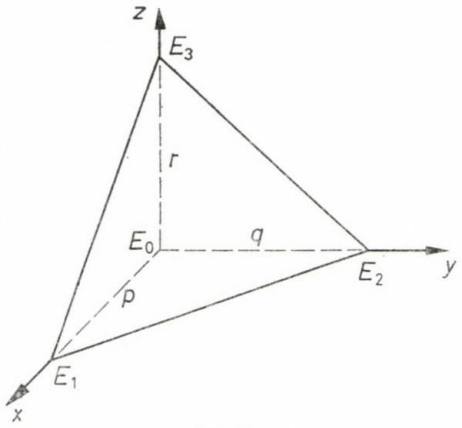
A (23)-ból

11. tétel (Pitagorasz-tétel): (24)

$F_0^2=F_1^2+F_2^2+F_3^2$ akkor és csakis akkor, ha $F_1F_2\cos W_{12}+F_1F_3\cos W_{13}+F_2F_3\cdot\cos W_{23}=0$ teljesül. Speciális esetek:

Legyen $W_{12}=W_{13}=W_{23}=\pi/2$, akkor $F_0^2=F_1^2+F_2^2+F_3^2$.

Az S_1, S_2, S_3 oldalak páronkénti merőlegessége elegendő a pitagoraszi reláció teljesüléséhez. Azonban nem szükséges. Erre három példát mutatunk be.



10. ábra

1. példa: Derékszögű pitagoraszi tetraéder *(10. ábra):*

Rögzítsük a tetraéder E_1, E_2, E_3 csúcspontjait és legyen E_0 a tetraéder változó pontja.

i	E_i	F_i^3	W_{ik}
0	$(0;0;0)$	$\{(qr)^2+(pr)^2+(pq)^2\}/4$	$p, q, r>0$
1	$(p;0;0)$	$(qr)^2/4$	$W_{12}=\pi/2$
2	$(0;q;0)$	$(pr)^2/4$	$W_{13}=\pi/2$
3	$(0;0;r)$	$(pq)^2/4$	$W_{23}=\pi/2$

2. példa: Ferde pitagoraszi tetraéder:

i	E_i	F_i	F_i^2	W_{ik}
0	$(0;0;0)$	57	3249	—
1	$(10;0;0)$	$3\sqrt{61}$	549	$W_{12}=50{,}67°$
2	$(0;q;0)$	$30\sqrt{2}$	1800	$W_{13}=67{,}41°$
3	$(0;0;r)$	30	900	$W_{23}=135°$

3. példa: Elfajult pitagoraszi tetraéder:

i	E_i	F_i	F_i^2	W_{ik}
0	$(3;0)$	21	441	—
1	$(0;6)$	6	36	$W_{12}=0$
2	$(7;4)$	9	81	$W_{13}=0$
3	$(0;0)$	18	324	$W_{23}=\pi$

Kérdés: Mi az E_0 pontok mértani helye, ha $F_0^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$ teljesül?

Válasz: E_0 egy egyértelműen meghatározott ellipszoidon fekszik. Ennek analitikus levezetését most el kell hagynunk, de (1)-ben megtaláljuk. A válaszban azonban a (10) általánosítását látjuk. A Thalész-kör analógiájára azonban a Thalész-gömb elnevezés félrevezető lenne; a Thalész-ellipszoid a helyes megjelölés.

2.4. *Vetületi tétel*

Szorozzuk skalárisan a $-F_0\mathbf{N}_0 = F_1\mathbf{N}_1 + F_2\mathbf{N}_2 + F_3\mathbf{N}_3$ egyenletet $-\mathbf{N}_0$ felületi normálvektorral és vegyük figyelembe (16)-ot, akkor kapjuk, hogy

12. tétel (vetületi tétel tetraéderrel):

$$F_0 = F_1 \cos W_{01} + F_2 \cos W_{02} + F_3 \cos W_{03}. \tag{26}$$

2.5. *Sinustétel*

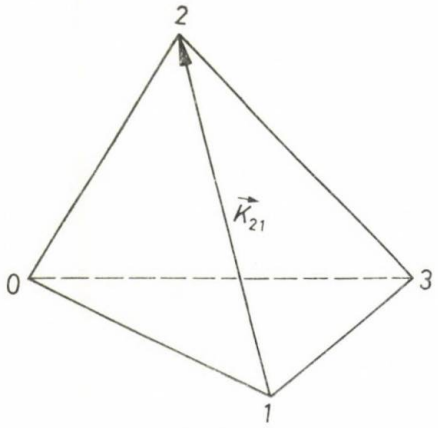
Az E_0, E_1, E_2, E_3 csúcspontú tetraéder E_1-ből E_2-be menő élvektora $\mathbf{K}_{21}$. Ez a $\mathbf{K}_{21}$ vektor illeszkedik az S_3 és S_0 oldalakra, *(11. ábra)* ezért $(N_3, \mathbf{K}_{21}) = (N_0, \mathbf{K}_{21}) = 0$ Marad tehát

$$F_1(\mathbf{N}_1, \mathbf{K}_{21}) = F_2(\mathbf{N}_2, \mathbf{K}_{21}) = 0, \tag{27}$$

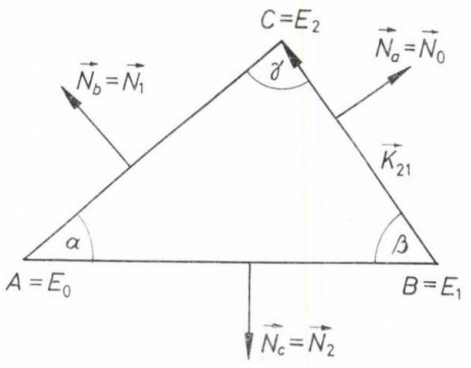
melyből (20) és (21) alapján

$$F_1 \sin W_{12}1 = F_2 \sin W_{21}2, \tag{28}$$

vagy általánosan



11. ábra



12. ábra

13. tétel (sinustétel tetraéderre):

$$F_i \sin W_{ij}\, i = F_j \sin W_{ji}\, j. \tag{29}$$

Végül a $W_{12}1$ és $W_{21}2$ szögek jelentésére mutatunk rá, vagyis azt keressük, hogy mi ezeknek a szögeknek a megfelelője a háromszögben. Legyen $A = E_0$, $B = E_1$, $C = E_2$ *(12. ábra)*.

$$|\mathbf{K}_{12}| = a, \quad (\mathbf{N}_1, \mathbf{K}_{21}) = a \sin \gamma, \quad (\mathbf{N}_2, \mathbf{K}_{21}) = -a \sin \beta.$$

Tehát $W_{21}^2 = \beta$ és $W_{12}^1 = \gamma$. A háromszögnél tehát W_{12}^2 a W_{02} szöggel, W_{12}^1 pedig W_{01} szöggel esik egybe, és a háromszögnél a sinus- és cosinustételek ugyanazokra a szögekre vonatkoznak. A tetraéderből azonban azt látjuk, hogy a sinus- és cosinustételek kvalitatíve is különböző szögtípusokra érvényesek. Így a tetraéder geometriája

olyan összefüggésekre vezetett, amelyeket a háromszögből nem lehet látni. Az előzőekben a tételeket $n=2$ és $n=3$ dimenzió esetben vezettük le; az általánosítás tetszőleges n dimenzióra is lehetséges.

IRODALOM

DÖRBAND, W.; *Ableitung simplizialer Satze für Dreieck und Tetraeder aus dem Normalensatz.* Wiss. Zeitsch. d. Ernst-Moritz-Arndt Univ. Greifswald, Math.-Nat.-Wiss. Reihe, 35 (1986) 3.

ÁBRAHÁM ISTVÁN
főszerkesztő
Tankönyvkiadó, Budapest

A matematikaoktatás és a tankönyvek

„Úgy, ahogy ma állnak a dolgok, csak a szegény diákok és a szegény tanárok tudják azt, milyen rossz a magyar tankönyvek kilencvenöt százaléka ... Tíz tanár közül kilenc szidja azt a tankönyvet, amit tanít."

Nem, az idézet nem mai keletű: több, mint 60 éve, 1928-ban írta ezeket a sorokat Móra Ferenc. De sietni kellett ezt kijelenteni, hiszen hasonló kritikával napjainkban is találkozunk: a közelmúltban kerültek a közoktatás tankönyvei „viták kereszttüzébe", szakmai körökben és a tömegkommunikáció számára is „hálás botránykő"-nek számít egyes tankönyvek vagy azok részleteinek kipécézése. A bírálatok általában különbözőek: kritizálni szokták az életkori sajátosságokat kellően figyelembe nem vevő stílust, a tankönyvek szerkezetét, a gyorsan változó világunkat csak fáziskéséssel követni tudó tartalmat, de a legsúlyosabbak a metodikai kifogások, amelyeket a könyvből tanulók sínylenek meg elsősorban, valamint a könyvet a tanításban felhasználni akaró tanárok.

Amióta tankönyvek léteznek, mindig bírálták is azokat, de a kritika felerősödése napjainkban kortünet: az iskoláztatás kiszélesedésével egyre több tanuló és egyre hosszabb ideig használja a tankönyveket, s így statisztikailag is nagyobb az esély a bírálatra. Ugyanakkor a tankönyvek információtartalma is a társadalmi fejlődéssel szinte szükségszerűen egyre bővül és viszonylag gyorsan változik, ami gyakran a szülők, az idősebbek megnemértését váltja ki. A civilizálódással növekszik az emberek komfortigénye, és elvárják a tankönyvtől is, hogy „jobban szolgáljon": kevesebb fáradsággal nagyobb eredményhez vezessen a használata. Mindezekhez járul még hazánkban a tudás alulértékeltségéből származó motivációhiány, és fokozza a tankönyvek iránti igényeket a tanári pályán érvényesülő kontraszelekció, ami furcsa módon egyszerre jár a direktebb irányító hatás és a nagyobb tanári szabadság elvárásával.

A matematika-tankönyvek esetében a kifogások többnyire a tankönyvek terjedelméhez, terjengősségéhez kapcsolódnak és ahhoz, hogy hosszúságuk ellenére kevésbé valósítható meg velük a differenciált oktatás: a matematikából gyengébbek „nem látják a fától az erdőt"; önállóan alig-alig tudják kihámozni az alapvetően lényeges információt a könyvből, míg a jobbak számára tehertétel az elsajátításhoz a könyvben közölt hosszú út, és a vastag tankönyvek még így sem tartalmaznak annyi matematikát, amennyit ezek a tanulók megtanulni képesek lennének, illetve amennyi egyes pályákon a sikeres továbbtanuláshoz, vagy esetenként a felvételi vizsgához szükséges lenne. Egyéb forrásokból ezeknek a tanulóknak nehéz az információéhségüket csillapítani: siralmasan kis számban és kis példányszámban jelennek meg matematikai tárgyú könyvek országunkban, és ezek jó-

része is a tanulók által közvetlenül alig használható.

A tankönyvek terjedelemnövekedésében elsősorban nem a tankönyvírók a ludasak: bár jelenleg is oldalszám szerint történik a honorárium kifizetése, az „anyagi ösztönzők" megállapítása olyan, hogy nemigen éri meg sokat írni. Sokkal inkább egy régebbi szemléletmódból ered a könyvek „felhízlalásának" gyakorlata, amely szerint a matematikát is közvetlenebbül kell a termelés, a gazdasági és — igen, ez is — a politikai célok szolgálatába állítani. Jól mutatja ezt a következő példa: az 1950-ben még érvényben lévő, 2 évfolyam számára a tananyagot és a szükséges feladatokat tartalmazó tankönyv terjedelme 283 oldal (Borosay: Matematika a középiskolák III. és IV. osztálya számára, Tankönyvkiadó, 1950); a következő évben a gimnáziumok II. osztálya számára megjelent Matematika tankönyv (Tankönyvkiadó 1951) egymaga 246 oldalas és az I. fejezet címe: Terület felosztása füves vetésforgó céljaira. A tankönyv első mondatai: „Mibel különbözik a terméketlen szikla a termőtalajtól? Ezt a szovjet biológia derítette fel. Az élet tudománya adja meg a választ a régi kérdésre, mert Viljamsz, a híres szovjet tudós bebizonyította...".

A tankönyvek, illetve az „írott matematika" körüli gondok is hozzájárulhattak ahhoz, hogy ma már messze nem vagyunk az a matematikai nagyhatalom, amely Neumann Jánost, Teller Edét, Erdős Pált adott a világnak, vagy, amit talán hasonlóan fontosnak, sőt az országban maradottak számára meghatározó jelentőségűnek nevezhetnénk: olyan műszaki és közgazdasági értelmiséget, amely természetszerűen használta a matematikát munkája során, illetve egyáltalán: a matematikát fontosnak tartó, a világképükbe, gondolkodásmódjukba beépítő embereket, akik nem büszkélkednek a nagyközönség előtt azzal, hogy már az egyszeregyre sem emlékeznek ...

Közismert a tény, a fejlett és a gyorsan fejlődő országok példáinak sorával bizonyítható, hogy — korunkban különösen — a matematikai tudás növelése az emberekben egyáltalán nemcsak tanügyi cél, hanem hosszabb távon szinte közvetlen meghatározója a gazdasági helyzetnek, az életszínvonalnak. Érdekes módon az „egyszerű" emberek elég jól érzik ezt, amit mutat például az is, hogy olyan matematikakönyvek, felvételi tájékoztatók kerülnek szinte évente újrakiadásra és fogynak el nagy példányszámban, amelyeknek még a megjelentetésük is erősen vitatott szakmai körökben.

A fentiek és a több mint két évtizedes tanári gyakorlatom alapján is a matematika-tankönyvek vonatkozásában — egyelőre a középiskolákban — a következőket érezném megvalósítandónak:

1. Legyen évfolyamonként egy ún. *alaptankönyv,* amely tartalmazza a tantervi törzsanyagot, annak kiegészítése irányait és lehetőségeit, valamint a kiegészítések írott lelőhelyeit más könyvekben. Legyenek benne ebben a „mag" tankönyvben a közölt ismeretek alapvető alkalmazásai és példák-feladatok az ismeret-jártasság szintű elsajátításához. Tehát *tartalmilag* minden legyen benne, amit az adott évfolyamon az országban kötelező tanítani, és aminek biztos ismerete a nem speciális tanterv szerint tanulóknak jeles érdemjegyet eredményez. A tartalom meghatározása nem egyszerű kérdés: a „mit tanítsunk" a pedagógiában mindig alapprobléma volt. Úgy gondolom, hogy a tananyagot igen széleskörű közmegegyezés alapján kellene meghatározni, nyilvánvalóan a társadalmi igényekre építve, amelyben figyelembe vesszük mind a különböző szakterületek már meglévő, vagy prognosztizálható matematika iránti igényét és elvárásait, mind a külföldi példákat, valamint a közoktatásunk jelen helyzetét, az életkori sajátosságokat és még sok más tényezőt.

Formailag az alaptankönyv szövegkönyv lenne, az ismeretek tára, de természetesen nemcsak definíciókat, tétele-

ket tartalmazna, hanem azok előzményeit és következményeit, tehát bevezető példákat, a feladatmegoldások fogásait stb., de a vetésforgóról és egyebekről ne essen szó. Azaz a könyv alapvetően csak matematikát tartalmazzon, és: *legfeljebb 200 oldalon* évfolyamonként!

Metodikailag több deduktív közelítést tudnék elképzelni benne, mint a mai könyvekben, valamint a legalapvetőbb ismeretek erősebb súlyozását. Ezt a könyvet nemcsak tartalmában tekinteném standardnak (úgy kellene kialakítani, hogy legalább 8—10 évig ne avuljon el), hanem kivitelezésében is maradandó külalakú lenne, netán könyvespolcra is kitehető formájú: ez a matematika középfokon a XX. század végén Magyarországon. Az alaptankönyv tankönyv áron lenne hozzáférhető, a diákoknak (szívem szerint) ingyen adnánk.

2. Az alaptankönyvek köré ún. *szatellit féltankönyvek* rendszerét képzelném el, amelyek az időszakosan jelentkező, illetve rétegigényeket elégítenék ki. Ezeknek a könyveknek a következő fajtái lehetnének:

a) Az alaptankönyv tartalmát kiegészítők: iskolatípusonként, speciális tantervhez kapcsolódóan, de egyéni érdeklődés kielégítésére is szolgáló funkcióval is jelenhetnének meg ezek a könyvek. Például az alaptankönyv a valós számokat tárgyalná, és néhány mondatban utalna a komplex számok irányában történő bővítésre. A komplex számokat külön szatellit könyv tartalmazná, amelyben alkalmazások, általánosítás is lehetne. Hasonlóan a közgazdasági matematikában szerepet játszó speciális sorozatok (járadék, beruházás, kölcsönök matematikája stb.) egy szatellit könyv anyagául szolgálhatnának. Egyéni érdeklődést is elégíthetne ki például az a szatellit, amelyben az alaptankönyvben kétdimenziósan tárgyalt koordinátageometria 3 dimenziós általánosítása, a gömbi, henger és egyéb koordináta-rendszerek, valamint a főbb alkalmazások lennének.

b) A *metodikai segédkönyvek* skálája is elég széles lehetne, mind a tanulást, mind a tanítást támogató jelleggel. Így a *felzárkóztató, korrepetitor* szerepű könyvek mellett az *egyéni tanulást segítő,* irányító, illetve vezérlő szatellitek állhatnának rendelkezésre, továbbá feladatgyűjtemények is, különböző szinteken. Szélesíteni kellene a *tanári segédkönyvek* körét, ne csak az ún. átlagtanárra méretezettek legyenek ezek, hanem például a „lágyabb" és „keményebb" matematikát kedvelő tanárok is kapjanak írott segítséget mind a motiváló hatások, történetihétköznapi vonatkozások, mind a nagyobb fokú egzaktságra, általánosításra, elmélyítésre törekvés vonatkozásában.

c) Külön kört jelenthetnének a közvetlen *pályaválasztást segítő* szatellitek: a felsőoktatásra való direktebb felkészítéshez az adott intézménytípust is bemutató műszaki, közgazdasági, tanári irányra speciálisan készített szatelliteket bocsáthatnának a tanulók rendelkezésére. De a tanulmányaikat középfokon befejezőkre is gondolni kellene, hiszen mind az irodai (számítógép!), mind a középvezetői vagy vállalkozói munkakörökben sok helyen lehet szükség matematikára.

d) Az alaptankönyvtől távolabbi pályákon elhelyezkedő szatellit féltankönyvek kiadására is lehetne gondolni, amelyek között volna:

— a *tantárgyi koncentrációt* megvalósító (fizika, számítástechnika, különböző szaktudományok, például még a csillagászat vagy akár a nyelvészet vagy kriminológia irányában is)

— *világnézetet alakító* (például a matematikai logika, a filozófiai vonatkozások, tudománytörténeti adalékok irányában)

— *segédeszközök* a matematikához célzatú (zsebszámológépek, számítógépek működése és alkalmazásuk, alapszoftver, gyűjtemények stb.)

— a tantervi matematikából távolabbra *kitekintést nyújtó* (a külföld matematikája az iskolában és a kutatóműhelyek-

ben, a hazai matematikai kutatások, egy-egy matematikai témakör születését és fejlődését bemutató irányban például)

— *speciális alkalmazásokat* tárgyaló (például optimumszámítási eljárások egy-egy műszaki-gazdasági területen, a „történelem matematikája": a Waterloo-i csata hálóterve, az Észak-Afrikai hadjárat matematikai modellje, ...; az infláció és bankkamat összefüggései, a háztartás költségvetése stb.).

A szatellit féltankönyvek változatos terjedelemben és formában — jegyzetalaktól a könyvespolc büszkeségéig — jelenhetnének meg és: könyváron, a kiadónak kisebb-nagyobb nyereséget is biztosítóan. Ebből következően megvásárlásuk a tanulók számára nem lenne kötelező: elvileg az alaptankönyv birtokában és jó tanári vezetéssel a tanuló eljuthat olyan szintre, mintha az összes szatellit könyvet átrágta volna. De az írottan megvásárolható ismeretet is biztosítani kell számukra! Igen, ennek van, illetve lehet anyagi vetülete a szülőkre nézve is. Népgazdasági szinten már állandóan hangoztatjuk, hogy az oktatásra áldozni kell, a nevelésügy jó befektetés. Mikroszinten sincs ez másképp, sőt.

Az alaptankönyv és a szatellitek rendszerét kiegészíthetik a könyvek számítógépes oktatóprogram változatai, amelyek nemcsak az ismeretszerzést, hanem a bevésést, önellenőrzést is segíthetik. Ha fixen rögzített alaptankönyv mellé kellene ilyeneket készíteni, azok költsége sem lenne elviselhetetlenül magas.

Az alaptankönyv maga utalna „bolygórendszerére", tehát a szatellitek címei, rövid tartalmuk abban megtalálhatók lennének. A tanároknak pedig mindenegyes szatellithez hozzá kellene jutni, vagy személyre szólóan mutatványpéldányként (ingyen), vagy legalább az iskolák kapjanak néhány teljes szatellitsorozatot. A szatellitek akár évente is cserélhetők lennének, és igen sok irányban kibővíthető lenne a családjuk, akár még különböző jószándékú magánkiadásokat is el lehetne képzelni, így természet szerűen nem csak a diákság érdeklődésére lehetne számítani terjesztésükkor.

A rendszer bevezetéséhez megoldandó még jónéhány kérdés:

— rövid időn belül (kb. 1 év?) megállapodásnak kellene születnie a *tanterv* kérdésében (az alaptankönyvek tartalma),

— ezt követően az új (megújított?) tantervi koncepciót legalább egy évben ki kellene *próbálni*, majd ezután fokozatosan az egyes évfolyamok alaptankönyvtervezeteit is,

— a legalább 1 évi kipróbálás után az alaptankönyvet *alternatív tankönyvként* szélesebb körben funkcionáltatni kellene.

A szatellit könyvek megjelenésével — különösen a távolabbi pályákon lévő szatelliteknél — nem kellene megvárni az alaptankönyv véglegesedését, közülük egyesek akár holnap megjelenhetnének.

Célszerűnek látszik továbbá a szakmai közvélemény tájékoztatására (ebbe minden szaktanár természetszerűen beletartozik!) sort keríteni és véleményüket a rendszer kialakításánál és korrekciójánál feltétlenül figyelembe kellene venni.

Alapvetően fontos az igen színvonalas tankönyvszerzői munka, amit elsősorban anyagilag kellene fokozottabban ösztönözni (például differenciált példányszám-érdekeltséggel), de erősíteni kellene a szerzők erkölcsi elismerését is. Nem nélkülözhető a széles közvélemény informálása, a matematika ázsiójának javítása társadalmunkban a tömegkommunikáció csatornáin sem. Feladatok hárulnának a tanárképzésre is.

A javasolt rendszert annak teljes kiépülése és néhány éves funkcionálása előtt nem látszik célszerűnek kiterjeszteni. Ha erre a kiterjesztésre sor kerülne, akkor elsőként az általános iskolai felső tagozatos matematika irányában lehetne lépni, majd esetleg egyes reáltárgyak felé.

DR. SCHARNITZKY VIKTOR
főiskolai tanár,
Budapest

Matematikus vándorgyűlés Veszprémben

A Bolyai János Matematikai Társulat az 1989. évi, sorrendben huszonkilencedik Rátz László Vándorgyűlést 1989. július 4-e és 7-e között rendezte meg Veszprémben több, mint 420 résztvevővel.

A vándorgyűlést **Hajnal András** akadémikus, a társulat főtitkára nyitotta meg, majd *Balogh Zsigmond* a Veszprém Megyei Tanács V. B. általános elnökhelyettese és **László Alfréd** a Veszprémi Vegyipari Egyetem rektorhelyettese üdvözölte a vándorgyűlés résztvevőit.

Az üdvözlő beszédek után **Imrecze Zoltánné,** az 1989. évi Beke Manó Emlékdíj Bizottságának titkára felolvasta a Bizottság döntését, mely szerint 1989-ben Beke Manó Emlékdíjban részesíti:

Esztergomi Ernőnét, a II. ker. Pitypang utcai általános iskola tanárát,
Hodászi Ede nyugalmazott középiskolai tanárt,
Lájer Margit matematika—fizika szakos szaktanácsadót,
Lill Jánosnét, a budapesti XIV. ker. Tipegő utcai óvoda vezetőjét,
Radnainé Szendrei Juliannát, az OPI főmunkatársát,
Schmidt Józsefnét, az ajkai Bródy Imre Gimnázium és Egészségügyi Szakközépiskola tanárát.
Somfai Zsuzsát, a budapesti Eötvös József Gimnázium tanárát.

A díjakat **Hajnal András** adta át.

Az ünnepélyes megnyitót plenáris ülés követte, amelyben a következő előadások hangzottak el:

Fejes Tóth László: *Mozaikok és antimozaikok.*
Laczkovich Miklós: *„A kör négyszögesítése".*

A következő három napon három szekcióban: alsó tagozat (AT), felső tagozat (FT), a középiskolák (K) és a felsőoktatási ankéton (FA) folytatódott az érdemi munka.

Mivel több előadás több összevont szekció előtt hangzott el, ezért az előadásokat az előadók szerinti betűrendben sorolom fel, és zárójelben tüntetem fel az érdekelt szekciókat.

Abonyi Tünde: *A számolási készség fejlesztése és a matematika,* (AT).
Dusza Árpád: *Algoritmusok,* (K).
Fábos Lászlóné: *Zsebszámológépek a 3. és 4. osztályban* (feladatmegoldó szeminárium), (AT).
Hegedűs József: *A számítógép felhasználása a tanításban* (feladatmegoldó szeminárium) (AT).
Hegyvári Norbert: *Feladatmegoldó szeminárium,* (FT).
Horváth Alice: *Matematikatörténeti érdekességek,* (AT, FT).
Horváth Jenő: *A térgeometria tanítása — térszemlélet fejlesztése,* (FT, K).
Hubert Tibor: *Bemutató óra gyerekek nélkül,* (K).
Imrecze Zoltánné: *Egy országos verseny tapasztalataiból,* (FT).
Kertész Viktor: *Differenciálegyenletek alkalmazásának lehetőségei,* (K, FA).
Kopasz Éva: *Geometriai konstrukciók* (a feladatmegoldó szeminárium), (AT).
Kovács Zoltán: *A mérés tanítása a szabadban,* (AT, FT).
László Zoltán: *Valószínűségszámítás* (feladatmegoldó szeminárium gimnáziumi témákról), (K).

Máté László: *A lineáris algebra szerepe a matematikaoktatásban,* (K, FA).
Percsi Olga: *Feladatmegoldó szeminárium,* (FT).
Pósa Lajos: *Lehetetlenségi bizonyítások I—II,* (K).
Somfai Zsuzsa: *Beszéled-e a matematika nyelvét? Matematika — nyelv — kommunikáció,* (FT, K).
R. Szendrei Julianna: *Mit nem értesz? A kombinatorika szerepe a gondolkodás fejlődésében,* (AT, FT.)
R. Szendrei Julianna: *Feladatmegoldó szeminárium szakközépiskolás és szakmunkásképzős témákból,* (K).
Szlávi Péter—Zsakó László—Horváth László—Szabadhegyi Csaba: *Számítástechnika alkalmazása matematikaórán. Véletlenszámok generálása, véletlen algoritmusok, n elem összes kombinációja, variációja, permutációja,* (K, FA).
Szvetits Zoltán: *Feladatok egymás után* (feladatmegoldó szeminárium), (K).
Szvetits Zoltán: *Ami kimaradt a szemináriumokról,* (K).
Tompa Klára: *A videó lehetőségei a tanítás fejlesztésében az* ICME—6 *konferencia tapasztalatai alapján,* (FT).
Török Turul: *Az angol matematika- és számítástechnika-oktatás néhány kérdése a magyar iskolákban,* (K).
Vígné Lencsés Ágnes—Rédling Elemér: *Visszajelzések a középiskolai matematikatanításról,* (K).
Vörös Sándor: *Feladatmegoldó szeminárim szakközépiskolás és szakmunkásképzős témákból,* (K).
Winkler Márta: *Személyiségnevelés,* (AT).
Ankét a tanítóképző intézetek matematika-tantervéről, (AT, FA).
Mi a teendő? Ankét a matematika oktatás helyzetéről, (AT, FT, K).

Az Informatikai Bizottság délutánján **Lőrentei Tamás:** *Mérés, vezérlés számítógéppel* című előadása hangzott el.

A Szabó Gáspár Leánykollégium földszintjén az ICME—6 konferencián készült videofelvételek megtekintése volt lehetséges.

A meglehetősen feszített program mellett alkalom volt az öt kirándulás (Ajka, Várpalota, Zirc-Csesznek, Baláca—Tihany—Balatonfüred, Balatonfüred) egyikén részt venni, Veszprém műemlékeivel ismerkedni, a Petőfi Színház előadásában a *Kőműves Kelemen* rockballadát megtekinteni és számos baráti beszélgetést folytatni.

Az 1990. évi vándorgyűlést a Bolyai János Matematikai Társulat Kaposvárott rendezi.

KÖNYVISMERTETÉS

V. N. Kaszatkin—L. I. Vladükina:
Algoritmusok és játékok, Tankönyvkiadó, 1988.
Középiskolai szakköri füzet

Az ember szeret játszani. Egyedül, kettesben és társaságban egyaránt. Vannak játékok, amelyekhez nem kell segédeszköz, vannak, amelyekhez egyszerű vagy bonyolult eszközök szükségesek, vannak, amelyekhez gép a partner. Mindegyik játék kezdetben szórakozást, kikapcsolódást ígér. Elmélyülve azonban egy-egy játékban előbb-utóbb kíváncsiak leszünk e játék sajátosságaira, és megkíséreljük kideríteni, hogyan lehetne nyerni, mi a nyerő lépéssorozat (algoritmus) titka. Ennek során fokozatosan végig kell gondolni a kezdő lépésektől kezdve a min-

denkori lépéseken és következményein át a befejező lépésekig a játék egész menetét. Ez általában nem könnyű matematikai, feladat és nem véletlen, hogy ez számos világhírű matematikus, például Leonardo Pisano (Fibonacci), Blaise Pascal, Pierre Fermat, Leonhard Euler, Carl Gauss, Pierre Laplace, Johann Bernoulli, P. L. Csebisev, Claud Shannon, Piet Hein, I. V. Arnold, Neumann János figyelmét is felkeltette és nevükhöz játékok kitalálása is fűződik.

A most megjelent szakköri füzet összesen 32 játékot ismertet.

A kötet *első* részében olyan játékokról van szó, amelyek bizonyos tárgyak (pl. gyufák, korongok, dámák) segítségével ketten játszanak úgy, hogy a tárgyakból felváltva elvesznek, a tárgyak helyzetét megváltoztatják stb. előre rögzített szabályok szerint. E részben 20 különböző játék, például Backet (1612), Fibonacci, Dudeney, Boltjanszkij játéka, a Fominajáték (1977) a Grandi-játék, a Csien Szü Dzü játék bemutatása mellett 24 feladat is helyet kapott.

A *második* részben 12 olyan játék szerepel, amelyeket speciális táblákon lehet játszani (köztük van a sakktábla is) korongokkal, bábukkal. Kivétel a Palántajáték (1967), amelyben játékosok vonalakat húznak. A játékhoz 8 feladat csatlakozik.

Egy-egy játék szabályainak az ismertetése és a játék születésének a leírása után a nyerő stratégia, illetve a nyeréshez vezető algoritmus megtalálása, szabatos leírása és elemzése a könyv tárgya. Ehhez sokféle matematikai fogalom és eljárás alkalmazása lehetséges, és a szükségeseket meg is találjuk a kötetben. A játékok elemzése, speciális eseteinek a vizsgálata és az általános elmélet felépítése mindmind matematika. Érdemes megemlíteni, hogy például a Láncoska-játék nyerő algoritmusa mindmáig ismeretlen.

A nyeréshez vezető algoritmus egyes lépéseiben azonban esetenként olyan bonyolult és hosszadalmas vizsgálatok lehetnek szükségesek, amelyeket a játékos belátható időn belül nem képes elvégezni, ezért itt segítségül hívhatja a számítógépet, megtaníthatja a számítógépet játszani. Erről szól a könyv *harmadik* része.

A matematika történetében jelentős helyet foglalt el a játékok tanulmányozása, és az általánosabb elméletek keresése. A korszerű játékelmélet megszületése Neumann János nevéhez fűződik (1928), és az azóta elért eredményeket nemcsak a legkülönbözőbb tudományokban, hanem a társadalom hétköznapi életében is széleskörűen alkalmazzák.

Külön meg kell említeni a könyvben található forrásértékű matematika-történeti adatokat, a fordító (Szalkai István) magyarázó jegyzeteit és a gazdag ajánlott irodalmat.

A kötet nemcsak a középiskolás diákoknak és tanáraiknak ajánlom figyelmébe, hanem azoknak az „öreg" diákoknak is, akik még nem felejtettek el játszani.

dr. Scharnitzky Viktor

HÍREK

Kis matematikusok versenye

A TIT Stúdió és az Országos Matematikai Választmány szervezésében 1989 júniusában 18. alkalommal került sor a Kis Matematikus Baráti Körök *Kalmár László versenyének* országos döntőjére. A megyei elődöntőkön részt vett 1220 tanuló közül 72 diák versenyzett a jó helyezésekért. A verseny győztesei:

5. osztály	I. **Hegedűs Márton,**	Nyíregyháza,
	II. **Édes Zoltán,**	Alsóörs,
	III. **Cserepes Sándor**	Kótaj.
6. osztály	I. **Szabó Anikó,**	Kaba,
	II. **Tringel Mihály,**	Mezőcsát,
	III. **Horvai Péter,**	Budapest.
7. osztály	I. **Csörnyei Mariann,**	Budapest,
	II. **Megyesi Zoltán,**	Szeged
	III. **Tarján Dénes,**	Budapest.
8. osztály	I. **Urbán Péter,**	Budapest,
	II. **Katz Sándor,**	Bonyhád,
	III. **Faragó Gergely,**	Budapest.

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10., II.10. 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! (Csatoljunk a megoldáshoz összesítő jegyzéket is!) A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével együtt közöljük.

Beküldési határidő: A lap kézbesítésétől számított egy hónap.

1221. Egy 12 dm hosszú drótszálból egy 1 dm élű kocka élvázát kell elkészítenünk. Legfeljebb hány kockaél alakítható ki úgy, hogy közben nem vágjuk el a drótot?

1222. A csuklósan egymáshoz csatlakozó AB és BC szakaszok A végpontja rögzített. Mi az ABC háromszögek köré írt körök középpontjainak mértani helye, ha B és C minden lehetséges helyzetet felvesz?

1223. Melyek azok a tízes számrendszerbeli hatjegyű négyzetszámok, amelyeknek legalább három utolsó jegye azonos?

Bagi Gábor, Barcs

1224. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan számrendszer van, amelyben található olyan kétjegyű négyzetszám, amelynek „fordítottja" is négyzetszám!

Hajna János, Pécs

1225. Van-e az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto\sqrt{2}\sin x-\sin(\sqrt{3}x)$ függvénynek többszörös zérushelye?

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

1226. Legyen az $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ az alábbi tulajdonságú:

(1) Létezik k természetes szám, hogy minden

$$n \geqq k\text{-ra} \quad n \leqq f(n) \leqq \frac{n(n+1)}{2};$$

(2) Végtelen sok n természetes számra $f(n) \leqq n+1$.

Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n!}$ konvergens, és határértéke irracionális!

Sándor József, Farcád

Feladatmegoldások (1197—1202.)

1197. Kiszíneztünk négy (általános helyzetű) pontot négy színnel: pirossal, kékkel, zölddel és sárgával. Ezután kiszíneztük a pontok által meghatározott szakaszokat is úgy, hogy azok színe megegyezett valamelyik végpontjuk színével, és közben mind a négy színt újra felhasználtuk. Mutassuk meg, hogy mindig van olyan pont, hogy

a) vagy a belőle kifutó szakaszok közül,

b) vagy a másik három pont közti szakaszok közül az egyik piros, a másik kék, a harmadik pedig zöld!

Megoldás: Tekintsük a piros, zöld és kék pontokat. Ha ezek által meghatározott három szakasz piros, kék, illetve zöld színű, akkor a feladat *b)* állítása teljesül a sárga pontra.

Tekintsük most azokat az eseteket, amelyekre nem teljesül a *b)* állítás a sárga pontra! Mivel minden szakasz színe megegyezik valamelyik végpontjának színével, ez csak úgy lehet, hogy a piros, zöld és kék pontok által meghatározott 3 szakasz közül 2 azonos színű. A színek szerepének azonossága miatt feltehetjük, hogy a 3 szakasz közül 2 piros, 1 pedig kék színű. Tekintsük ezután a zöld pontot. Mivel minden pontból indul ki saját színű szakasz, hiszen a színezés folyamán mind a 4 színt felhasználjuk, a zöld pontból kiindul zöld szakasz. Ezek szerint a zöld pontban 1-1 piros, kék és zöld szakasz találkozik, tehát a zöld pontra teljesül az *a)* állítás.

Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 14.

1198. Igazoljuk, hogy minden másodfokú $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény esetén, melyre $f(-x)=f(x+1)$, az f minimuma is, maximuma is állandó!

Nagy-Baló András, Budapest

Megoldás: Minden, így a feladatbeli másodfokú függvény képe is az y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola. Vegyük észre, hogy $\frac{-x+(x+1)}{2}=\frac{1}{2}$, tehát az x tengelynek az $x=\frac{1}{2}$ pontjára szimmetrikusan elhelyezkedő pontjaihoz tartozó függvényértékek egyenlők. Ez azt jelenti, hogy a feladatbeli függvényeknek mind a minimum*helye*, mind a maximum*helye* állandó.

Bíró Gábor, Kisvárda

A megoldók száma: 20.

1199. Hány olyan trapéz van, amelynek csúcsai egy szabályos n-szög csúcsaiból valók?

Megoldás: A szabályos n-szög két csúcsát összekötő szakaszt húrnak mondva, minden feladatbeli trapézt a szabályos n-szög két, egymással párhuzamos húrja definiálja. Bármelyik húr vagy a sokszög egyik oldalával egyállású, vagy ha n páros, merőleges egy átmérőre (leghosszabb húrra).

Ha n páratlan, bármely húr egy oldallal egyállású és minden oldalhoz vele együtt $\frac{n-1}{2}$ ilyen egyállású húr van. Az n oldal tehát $n\binom{n-1}{2}$ darab párhuzamos húrokból álló húrpárt, és így ennyi trapézt határoz meg. Ezek között nincs két olyan húrpár, amely ugyanazt a trapézt definiálná, ti. ez csak akkor lehetséges, ha a trapéz paralelogramma, de mert húrtrapéz is, ezért téglalap, ami azonban csak páros n-re lehetséges.

Ha viszont n páros, akkor bármely oldal $\binom{n}{2}$ darab párhuzamos húrokból álló húrpárt határoz meg. A sokszög szemköztes oldalai ugyanazokat a párokat adják, tehát $\frac{n}{2}\binom{n}{2}$ olyan trapéz van, melynek alapja a sokszög egy oldalával párhuzamos. A sokszög bármely átmérőjéhez $\frac{n}{2}-1$ darab

rá merőleges húr tartozik, ezért $\frac{n}{2}\binom{\frac{n}{2}-1}{2}$ darab ilyen húrpár van. A fenti típusú párokból adódó két trapéz pontosan akkor azonos, ha mindegyikük paralelogramma, azaz téglalap. Minden csúcsból $\frac{n}{2}-1$ darab az átmérőtől és egymástól is különböző hosszúságú húr indul ki és ezek mindegyike (a sokszög középpontjára szimmetrikus társával) 1—1 téglalapot határoz meg. Az n csúcs tehát

$$\frac{n\left(\frac{n}{2}-1\right)}{4}=\binom{\frac{n}{2}}{2} \text{ darab}$$

téglalapot definiál (ugyanazt a téglalapot négy csúcsának mindegyikéből megkapjuk, ezért kell 4-gyel osztanunk). Összesen tehát:

$$\frac{n}{2}\binom{\frac{n}{2}}{2}+\frac{n}{2}\binom{\frac{n}{2}-1}{2}-\binom{\frac{n}{2}}{2}=\binom{\frac{n}{2}}{2}\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{2}-2-1\right)=(n-3)\binom{\frac{n}{2}}{2} \text{ darab}$$

különböző trapéz van, ha az n páros.

Eredményeinket összefoglalva:

$$\frac{n\left(n-\frac{3+(-1)^n}{2}\right)(n-3)}{8}$$

olyan trapéz van, amelynek csúcsai egy szabályos n-szög csúcsaiból valók.

Zsidó-Nagy György, Kolozsvár

Megjegyzés: A fentebb meghatározott számú trapéz között sok egybevágó van. Nem nehéz megfontolások révén beláthatjuk, hogy páratlan n esetén $\frac{(n-1)(n-3)}{8}$, míg páros n-re $\frac{n(n-2)}{8}-\left[\frac{n-2}{4}\right]$ számú nem egybevágó trapéz van. Ez utóbbi számban $\left[\frac{n-2}{4}\right]$ darab téglalap van, és ha n 4-nek többszöröse, úgy e téglalapok között egy négyzet is található.

Hajna János, Pécs

A megoldók száma: 2.

1200. Melyek azok a tízes számrendszerbeli n-jegyű számok, amelyek számjegyeit bármilyen sorrendbe írva n-jegyű négyzetszámot kapunk?

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Megoldás: Az egyjegyű számok közül megfelel a 0, az 1, a 4 és a 9. A két- vagy többjegyű számokban csak az 1, 4, 5, 6 és 9 számjegyek fordulhatnak elő, hiszen bármilyen sorrendben elhelyezve ezeket n-jegyű négyzetszámot kell kapnunk.

Sklarszkij—Csencov—Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből (Aritmetika és algebra), Tankönyvkiadó, Bp., 1976. 55. feladata szerint, ha egy egész szám négyzete négy egyenlő számjeggyel végződik, akkor ez a jegy a 0. Így a szám csupa azonos jegyből nem állhat: négy vagy annál több jegy esetén az idézett feladat miatt, a két- és háromjegyűek pedig könnyen ellenőrizhetők.

Ha létezik a feltételeknek megfelelő (egynél több jegyű) szám, akkor legalább kettő különböző számjegye kell legyen. Írjuk olyan sorrendbe a számjegyeket, hogy e kettő kerüljön a tízesek, illetve az egyesek helyére. Ily módon két négyzetszámot kapunk, melyek különbségének abszolút értéke legfeljebb $91-19=72$ lehet. Mivel $(k+1)^2-k^2=2k+1$, azaz a szomszédos négyzetszámok közötti különbség egy szigorúan monoton növekvő sorozatot alkot, ezért $2k+1\leqq 72$, $k<36$. Feladatunk szempontjából elegendő tehát az első 36 természetes szám négyzetét megvizsgálni. Rövid számolás után kiderül, hogy — az elején már felsorolt egyjegyű számokon kívül — nincs több megoldása a feladatnak.

Csorba Ferenc, Győr, Kovács Béla, Szatmár

A megoldók száma: 15.

1201. Egy háromszög szögei legyenek α, β és γ, félkerülete s és a háromszög köré írt kör sugara r. Mutassuk meg:

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \leqq 4\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^3 \frac{r}{s}.$$

Dezső Gábor, Kolozsvár

Megoldás: A számtani és mértani közepekre ismert reláció alapján

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \leqq \left(\frac{\alpha+\beta+\beta+\gamma+\gamma+\alpha}{3}\right)^3 = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^3.$$

Elegendő tehát belátni, hogy

$$(*) \qquad \left(\frac{2\pi}{3}\right)^3 \leqq 4\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^3 \frac{r}{s},$$

vagy ami ezzel azonos,

$$\frac{s}{r} \leqq \frac{4\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^3}{\left(\frac{2\pi}{3}\right)^3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

A sinustételt is felhasználva

$$\frac{s}{r} = \frac{a}{2r}+\frac{b}{2r}+\frac{c}{2r} = = \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma.$$

A háromszögben érvényes viszont a

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \leqq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

reláció (lásd pl.: *Pogáts Ferenc:* Trigonometria, Műszaki Könyvkiadó, 1973., 278. oldal) és ezért (*) fennáll.

Az egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\alpha=\beta=\gamma$ azaz, ha a háromszög szabályos.

Mészáros József, Galánta

Megjegyzés: A (*) relációt a $2s \leqq 3\sqrt{3}r$ igazolja. Ez másképpen fogalmazva: adott r sugarú körbe írt háromszögek közül a szabályos háromszög kerülete a legnagyobb. Ennek igazolása pedig *Reiman István:* A geometria és határterületei, Gondolat, Bp. 1986. című könyv 235. oldalán megtalálható.

Kovács Gabriella, Nagybánya

Megoldók száma: 22.

1202. Adott kör köré írható-e két egyenlő területű, de nem egybevágó háromszög?

Péter Árpád, Sepsiszentgyörgy

Megoldás: Ha adott kör köré írható két egyenlő területű, de nem egybevágó háromszög, akkor (lévén az s félkerület és a kör ϱ sugarának szorzata a háromszög t területe) a háromszögek kerülete is egyenlő.

Azt fogjuk igazolni, hogy léteznek a feladat feltételeit kielégítő háromszögek, a feltett kérdésre tehát igenlő a válasz.

Legyen az ABC háromszög oldalainak hossza a, b és c és ez utóbbival szemköztes szöge γ. Mivel.

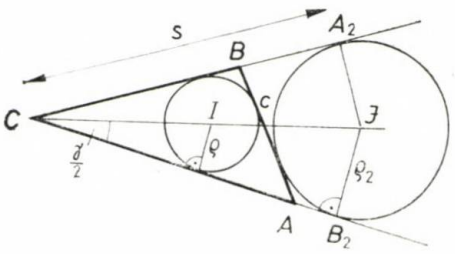
$$(1) \qquad a+b+c = 2s$$

és

$$(2) \qquad ab\sin\gamma = 2t,$$

továbbá ismert, hogy a beírt körnek az AC oldalon lévő B_1 érintési pontja a C csúcstól $s-c$ távolságra van *(1. ábra)* így az IB_1C derékszögű háromszögből

$$(3) \qquad s-c = \varrho\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$



1. ábra

Az (1), (2) és (3) alapján tehát

$$a+b = s+\varrho \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = s+\frac{t}{s}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} \tag{4}$$

és

$$ab = \frac{2t}{\sin\gamma}. \tag{5}$$

Ez azt jelenti, hogy a t és az s értékeket alkalmasan választva léteznek olyan γ értékek, amelyekre különböző a, b értékeket kapunk. Ez utóbbi feltétele az, hogy a (4) és (5) adta másodfokú egyenlet diszkriminánsára $\Delta = \left(s+\frac{t}{s}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \frac{8t}{\sin\gamma} \geqq 0$ teljesüljön.

(Az **1201.** feladat megoldásához fűzött megjegyzésben említett könyv 236. oldalán található $s^2 \geqq 3\sqrt{3}t$ reláció szabja meg az s, t értékpárok választhatóságát.) Az $s=t=6$ (azaz $\varrho=1$) választásra, ha

$$\gamma = \frac{\pi}{2}, \quad \text{úgy} \quad a=3, \quad b=4 \quad \text{és} \quad c=5;$$

ha viszont

$$\gamma = 2\operatorname{arctg}\frac{3}{4}, \quad \text{úgy} \quad a=\frac{22+\sqrt{34}}{6}, \; b=\frac{22-\sqrt{34}}{6} \quad \text{és} \quad c=\frac{14}{3}.$$

Kovács Béla, Szatmár,
Kovács Gabriella, Nagybánya

Megjegyzés: A félkerület és a beírt kör sugarának rögzítésével megszerkeszthetünk azonos területű, de nem egybevágó háromszögeket. Ismert, hogy az ABC háromszög AB oldalához írt ϱ_c sugarú kör a C csúcstól fékerületnyire érinti a CA és a CB oldalakat *(1. ábra)*. Ha tehát alkalmasan választott szögek két szárára felmérjük az adott $CA_2=CB_2=s$ távolságokat, és a γ szögfelezőjén megszerkesztjük az I illetve J körközéppontokat, akkor az I közepű ϱ sugarú és a J közepű ϱ_c sugarú körök közös belső érintője a kívánt ABC háromszögeket adja. Ilyen háromszögek nyerhetésének feltétele az, hogy

$$\varrho\left(\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right) < s$$

teljesüljön. Ennek igazolását a borító ábrája nyomán az Olvasóra bízzuk.

Bíró Gábor, Kisvárda

A megoldók száma: 9.

A megoldók névsora (1197—1202).

Bagi Gábor, Barcs (1197., 1198., 1200., 1201); Bencze Mihály, Brassó (1197., 1198., 1201.); Bíró Bálint, Eger (1201.); Bíró Gábor, Kisvárda (1198., 1200—1202.); Boda Miklós, Pécs (1198., 1201.); Csorba Ferenc, Győr (1197., 1198., 1200., 1201.); Hajna János, Pécs (1197., 1202.); Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (1197., 1198., 1200., 1201.); Kosztolányi József, Szeged (1198., 1201.); Kovács Béla, Szatmár (1198., 1200—1202.); Kovács Gabriella, Nagybánya (1197., 1198., 1200—1202.); Mészáros József, Galánta (1198., 1201.); Mihálykó Csaba, Veszprém (1198., 1200., 1201.); Sallai István, Zilah (1197., 1200., 1201.); Steierlein István, Balatonfüred (1197., 1198., 1200., 1201.) Sütheő Cecília, Szombathely (1197.); Számadó László, Bp. (1197., 1198., 1200—1202.); Szenkovits Ferenc, Székelyudvarhely (1197., 1198., 1200—1202.); Tóth Sándor, Sárospatak (1197., 1198., 1200., 1201.); Tuzson Zoltán Székelyudvarhely (1197., 1198., 1200—1202.); Varga István, Békéscsaba, (1198., 1201., 1202.); Zalán Péterné, Bp. (1198.); Zsidó-Nagy György, Kolozsvár (1197., 1199—1202.).

Új könyvek

BÉKEFI ZSUZSA: *Gráfelméleti feladatgyűjtemény*, Veszprém, 1988, Megyei Pedagógiai Intézet, 77 oldal, 65 Ft.

DEMETROVICS JÁNOS—DENEV, JORDAN—PAVLOV, RADISLAV: *A számítástudomány matematikai alapjai*, Egyetemi segédkönyv, (2. kiadás), Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 374 oldal, 49 Ft.

DENKINGER GÉZA: *Valószínűségszámítás*, Egyetemi tankönyv, (3. kiadás), Budapest, 1989. Tankönyvkiadó, 294 oldal, 34 Ft.

DOBÓ ANDOR: *Euklidész hatása a tudomány fejlődésére*, Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 88 oldal, 32 Ft.

FRIED ERVIN: *Általános algebra*, Egyetemi tankönyv, (2. javított kiadás), Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 338 oldal, 39 Ft.

GÁCS PÉTER—LOVÁSZ LÁSZLÓ: *Algoritmusok*, Egyetemi tankönyv, (3. kiadás), Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 179 oldal, 14 Ft.
GÁDOR ENDRÉNÉ—GYAPJAS FERENCNÉ—HÁRSPATAKINÉ DÉKÁNY VERONIKA—DR. KORÁNYI ERZSÉBET—PÁLMAI LÓRÁNT—POGÁTS FERENC—DR. REIMAN ISTVÁN—DR. SCHARNITZKY VIKTOR: *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából*, (6. kiadás), Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 478 oldal, 58 Ft.

GREENSPAN, D.—RÓZSA, P. (editors): *Numerical methods*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 50, Budapest—Amsterdam—Oxford—New York, 1988, János Bolyai Mathematical Society and Elsevier Science Publishers B. V., 688 oldal, 1000 Ft.

HAAS ANDRÁS: *A prím kitevőjű Fermat egyenletekre vonatkozó tételek*, Budapest, 1989, Datamax, 26 oldal, ár nélkül.

HAJNAL, A.—LOVÁSZ, L.—SÓS, V. T. (editors): *Combinatorics*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 52, Budapest—Amsterdam—Oxford—New York, 1988, János Bolyai Mathemathical Society and Horth-Holland Publ. Co., 596 oldal, 1500 Ft.

HETÉNYI PÁLNÉ (szerk.): *Számítástechnikai feladatok 2000-ig*, Budapest, 1989. OMIKK, 369 oldal, 138 Ft.

INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION (6) BUDAPEST, 1988, Budapest, 1989, Bolyai János Mathematical Society, 220 oldal, ár nélkül.

JEGOROV, I. P.: *Geometria*, Egyetemi segédkönyv, (2. kiadás), Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 320 oldal, 43 Ft.

KASZATKIN, V. N.—VLADÜKINA, L. I. *Algoritmusok és játékok*, Középiskolai szakköri füzetek, Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 96+XVI oldal, 77 Ft.

KATZ SÁNDOR: *Függvények korszerű felfogásban*, Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 95 oldal, 45 Ft.

KÁLOVICS FERENC: *Numerikus módszerek differenciálegyenletek megoldásához*, (2. kiadás), Miskolc, 1988, NME, 61 oldal, ár nélkül.

KÁLOVICS FERENC: *Numerikus módszerek függvények közelítésére*, (2. kiadás), Miskolc, 1988, NME, 74 oldal, ár nélkül.

Matematikai módszerek a meteorológiában, a Meteorológiai Tudományos Napok előadásainak összefoglalója, Budapest, 1988, OMSZ, 27 oldal, ár nélkül.

MOLNÁR EMIL: *Matematika versenyfeladatok gyűjteménye 1947—1970*, Feladatok, megoldások, jegyzetek, Egyetemi segédkönyv, (4. kiadás), Budapest, 1988, Tankönyvkiadó, 580 oldal, 72 Ft.

PUSKÁS ALBERTNÉ: *Kombinatorika, valószínűség, statisztika*, Szakköri program, Szeged, 1988, Csongrád Megyei Pedagógiai Intézet, 52 oldal, ár nélkül.

REIMANN JÓZSEF—TÓTH JULIANNA: *Valószínűségszámítás és matematikai statisztika*, Főiskolai tankönyv, (2. kiadás), Budapest, 1989, Tankönyvkiadó, 269 oldal, 27 Ft.

RUZSA IMRE: *Logikai szintaxis és szemantika*, Budapest, 1988, Akadémiai Kiadó, 277 oldal, 98 Ft.

SOÓS GÁBOR—SZILASSI LAJOS: *Algoritmusok, játékok*, Budapest, 1988, OPI, 55 oldal, ár nélkül.

SZENTHE, J.—TAMÁSSY, L. (editors): *Topics in differentialgeometry I—II.*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 46, Budapest—Amsterdam—Oxford—New York, 1988, János Bolyai Mathematical Society and Elsevier Science Publ. Co., 1377 oldal, 1800 Ft.

SZLÁVI PÉTER—ZSAKÓ LÁSZLÓ: *Módszeres programozás, rekurzió, Mikrológia*, Budapest, 1988, ELTE, 76 oldal, ár nélkül.

SZLUKA EMIL—SCHNEIDER LÁSZLÓ (szerk.): *Természettudományos és műszaki ki kicsoda?* 2. kötet, Budapest. 1988, OMIKK. 400 oldal, 250 Ft.

Témazáró feladatlap ajánlatok matematikából a szakmunkásképző iskolák számára, Veszprém, 1988, Megyei Pedagógiai Intézet, 41 oldal, 40 Ft.

ZALAI ERNŐ: *Bevezetés a matematikai közgazdaságtanba*, Budapest, 1989, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 389 oldal, 107 Ft.

Dr. Szendrei János: **Algebra és számelmélet**

Tanárképző főiskolai tankönyv. 1989-ben jelent meg a negyedik kiadás, amelyben apróbb hibákat javítottunk. A könyv tartalmát a tanárképző főiskolák tanterve szabja meg. Tartalmából: Halmazelméleti alapismeretek, Kombinatorika, Alapvető algebrai fogalmak, Euklideszi gyűrűk, Gauss—féle gyűrűk, A komplex számok, Vektorok, Mátrixok és determinánsok, Algebrai egyenletek, egyenletrendszerek, Algebrai struktúrák, A számfogalom felépítése. A könyv végén az egyes fejezetekhez gyakorlófeladatok találhatók. (Raktári szám: 42188.)

Újvári István: **Felkészülés és felzárkozás matematikából**

A segédkönyv részletekre bontja az általános iskolai tantervi követelményeket, ezeket súlyozza, és hozzájuk feladatokat rendel úgy, hogy „fehér folt" ne maradjon. (Raktári szám: 19029.)

Munkaközösség

Tanári kézikönyv a Matematika feladatgyűjtemény I. II. III. kötetéhez

Az 1987-ben megjelent Matematika feladatgyűjtemény (R. sz.: 13135/I-II-III.) feladataihoz ad útmutatást, illetve megoldást. (Raktári szám: 84129. 84130, 84135.)

Pogáts Ferenc—Hegyvári Norbert: **Középiskolai matematikai versenyek**

A Tankönyvkiadó hagyományosan megjelenteti a minden évben megrendezésre kerülő Arany Dániel Versenyek, az Országos Tanulmányi Verseny, valamint a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatait és annak megoldásait. Jelen kötetünk 3 év, az 1985—87-es évek anyagát tartalmazza. Ez a kiadvány — előzőekhez hasonlóan — komoly segítséget jelent a felvételire készülőknek és az igényes szakköri munkához egyaránt. (Raktári szám: 29188/XIX-XXI.)

Bereznai Gyula—Varecza Árpád: **Tanárképző főiskolák matematikai versenyei III.**

Sorozatunk III. kötetével ugyanazt a célt szeretnénk elérni, mint az előzményekkel: a mind nagyobb népszerűségnek örvendő versenyek feladatainak és azok megoldásainak ismertetése kellemes időtöltést, a matematika egyes fejezeteibe való hasznos betekintést és a további versenyekre történő jó felkészülés elősegítését biztosítsuk mindazoknál a főiskolai hallgatóknál, akik életcéljukat választották a matematika tanítását és népszerűsítését. A kötet összeállításakor gondoltunk érdeklődő középiskolás olvasóinkra is, a feladatokat, illetve megoldásaik jelentős részét szakkörön ők is feldolgozhatják. Emellett középiskolában tanító szaktanároknak is segítséget nyújthat a kiadvány azzal, hogy a differenciált önképzés megvalósításához színvonalas segédanyagot jelent.

(Raktári szám: 8164/III.)

Megyesi László—Peller József: **Számsorozatok, számosság, integrálszámítás**

A tanulók matematikai tevékenységének tervezése és irányítása a középiskolában sorozat utolsó kötete.

Az első fejezet vázolja a számsorozatok tanításának alakulását, sokszínűségét.

A második fejezet az integrálszámítással kapcsolatos oktatási tapasztalatok elemzésével kezdődik. A nehézségek matematikai és didaktikai megoldásrendszert, amely a kísérlet folyamán kialakult. Különös gonddal történik annak a megvilágítása, hogy miként folytatódik a téma középiskolai tárgyalása a felsőoktatásban.

A könyvet haszonnal forgathatják tanárok, tanárjelöltek, a matematikai pedagógia művelői.

(Raktári szám: 52783/VI.)

Dobó Andor: **Euklidész hatása a tudomány fejlődésére**

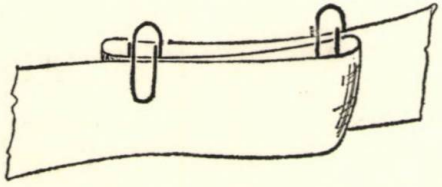
A szerző maga választotta optikán keresztül az i. e. 300 körül élt Euklidész görög matematika „Elemek" című monumentális könyvének a tudományos és kulturális életre gyakorolt rendkívüli hatását mutatja be.

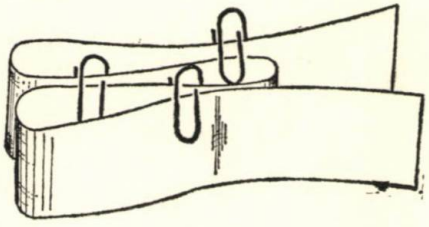
Feltehetően mindazoknak, akiknek középiskolai vagy magasabb iskolai végzettségük van, működési területüktől, elhivatottságuktól és szakmájuktól függetlenül érdeklődéssel veszik ezt a számos szempontból elgondolkodtató, további visszatekintésekre késztető könyvet.

(Raktári szám: 53904.)

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata





1989. XXXVI. évfolyam 6 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
URBÁN JÁNOS

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:
ÁCS PÁL, ELŐD ISTVÁNNÉ, HÓDI ENDRE, DR. KOLLER LÁSZLÓNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, LAJOS JÓZSEFNÉ, NÉMETHY KATALIN, PÁLMAY LÓRÁNT, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZENDREI JULIANNA, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1087 Budapest, Berzsenyi utca 6.
Telefon: 114-1009
89-3646 — Szegedi Nyomda
F. v.: Surányi Tibor igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a MELIR Bp. 1900 Lehel u 10/a közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással Postabank Rt 219-98636, 021—02799 a pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 42,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonként eladási ár: 7,— Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy a közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő adatokat is:
a) személyi számukat, *b)* asszonyok leánykori nevüket, *c)* lakáscímüket — irányítószámmal, *d)* foglalkozásukat (beosztásukat), *e)* munkahelyük pontos megnevezését (nyugdíjasok törzs számukat), *f)* munkahelyük címét — irányítószámmal.

TARTALOM

Pálmay Lóránt: Néhány észrevétel a felmérésekről 161
Ambrus András: A matematikaoktatás helyzete és perspektívái az Egyesült Államokban 164
Mihalovics Sándor: Néhány gondolat az egyenletek megoldását segítő apró ötletekről 171
Újvári István: Sakkmatematikát tanítottam 180
Jossette Adda: Harc az iskolai tanulással összefüggő kudarcok elhárításáért a matematika-tantárgy keretében 184
VITA 188
A magyar matematikaoktatás helyzetképe (1989. augusztus) 188
ÖTLETSAROK 192
Radnainé Szendrei Julianna: Két gemkapocs 192
Főiskolai oktatók tanácskozása ..... B. IV.

INHALT

Lóránt Pálmay: Einige Bemerkungen über die Kontrollaufgaben 161
András Ambrus: Die Lage des Mathematikunterrichts und seine Perspektiven in den USA 164
Sándor Mihalovics: Einige Gedanken über die Lösung der Gleichungen helfenden kleinen Ideen 171
István Újvári: Ich habe Schachmathematik unterrichtet 190
Josett Adda: Kampf für die Beseitigung der mit dem schulischen Lernen zusammenhängende Mißerfolge im Rahmen des Schulfaches Mathematik 184
DISKUSSION 188
Lagebericht über den Mathematikunterricht in Ungarn (August 1989) 188
IDEENECKE 192
Julianna Szendrei-Radnai: Zwei Büroklammer 192
Beratung der Hochschullehrer ..... IV.

СОДЕРЖАНИЕ

Палмаи Лорант: Несколько замечаний о определений уровня знаний 161
Амбруш Андраш: Состояние и перспективы обучения математики в США 164
Михалович Шандор: Несколько идей помогающих решение уравнений 171
Уйвари Иштван: Я преподавал шахматную математику 180
Жозетт Адда: Борьба за отклонение неудач связаных с школьными учёбами в предмет математики 184
СПОР 188
Сводка о положенииипреподавании математики в Венгрии (август *П* 1989) 188
УГОЛОК ИДЕЙ 192
Раднаине Сендреи Юлиа: Две скрепки ... 192
Совещане преподавателей вузов ..... IV.

PÁLMAY LÓRÁNT
vezető-szaktanácsadó
Budapest

Néhány észrevétel a felmérésekről

Elöljáróban hangsúlyozom, hogy a tanítás során elengedhetetlennek tartom a felmérést. Szüksége van erre a tanulóknak s a tanároknak egyaránt. Ezekből állapíthatjuk meg, hogy mit sikerült jó szinten megtanítani, s mire kell több időt fordítani. A tanulók is az azonos feladatokkal történő mérésből egyénileg megállapíthatják, hogy mi az amit nem gyakoroltak be, vagy esetleg meg sem értettek, hogy milyen hiányokat kell pótolniuk. Egy dolgozat értékelésekor nagyon lényeges, hogy a pedagógus a hiányok személy szerinti feltárásával egyénenként is segítse egyes tanítványait. A leírtak elsősorban a szokásos nagy dolgozatokra, vagy az ún. röpdolgozatokra, vonatkoznak. Ekkor ui. a tanító, a tanár tudja, hogy a megelőző időszakban mit milyen szinten tanított, mennyit gyakoroltatott. Ilyen esetekben is előfordulhat — még nagyobb rutinnal rendelkező kartárs esetén is —, hogy a dolgozat eredménye erősen eltér a várttól (többnyire gyengébb). Ennek igen sok oka lehet, nemcsak a tanulók készületlensége, hanem például az, hogy néhány sokat jelentkező értelmes tanuló megtéveszti a tanárt, aki azt hiszi, hogy mindenki jól tudja az anyagot. Pedig lehetnek az ilyen ügyes és aktív tanulók között is olyanok, akik írásban nagyon lassúak, s bár hibátlanul dolgoznak, de nem jutnak a végére. Az is előfordulhat, hogy a tanár nehezebb dolgozatot írat, mint amit az osztály elbír. Nagyon lényeges, hogy a tanár próbálja megállapítani a várt eredménytől való eltérés okát.

Fontosak azok a mérések, amelyeket a tanárok 5. osztály év elején, illetve a középiskola I. osztályának év elején íratnak (vagy akkor, amikor más kollégától vesznek át osztályt). Egy ilyen dolgozat összeállításakor (ha azt a tanár maga készíti el, s nem központi dolgozatról van szó) igen alaposan tanulmányozni kell az előző évfolyam tantervi követelményeit. Nem kérdezhetünk olyat, amit a tanuló nem tanult. Nem véletlen, hogy ilyen mérésekkel általában a legalapvetőbb anyagrészekre vonatkozó feladatokat szoktunk adni. Tudva azt, hogy egy tanórára összeállított dolgozatban nem vizsgálhatunk meg mindent, még a lényeges típusokból is szelektálni kell. Fontos ez a felmérés, mert a tanár megtudhatja belőle, hogy milyen általánosabb hibákkal, hiányokkal kell számolni, il. letve mire építhet jobban a tanításban. Az egyes tanulók figyelmét is fel tudja hívni a pótlandókra, a hiányok pótlását megfelelően választott feladatsorokkal segítheti. Indokolatlan viszont ezekből az egyszeri mérésekből messzemenő következtetéseket levonni. Bizonyára nemcsak magam tapasztaltam azt sok esetben, hogy egy ilyen felméréskor gyenge teljesítményt nyújtó tanuló két hónap múlva a jók között volt, de azt is, hogy az egyszerű minimum követelményeket jól teljesítő diáknak a későbbi tananyag bizony nehezebben ment. Ennek sok oka van. A tanulók a középiskolába sok helyről jönnek. Az iskolák tanítási feltételei nem azonosak. Nyilván más lesz a tudása annak a gyereknek, akit négy éven keresztül egy kiváló tanár tanított, mint annak, akinek évente változott a tanára, s közben esetleg még a tanár helyettesítését sem tudták megoldani. Erről a ta-

nuló nem tehet, mégis nagy hátránnyal indul.

Nem lehet figyelmen kívül hagyni a hosszú nyári szünetet sem, amikor természetesen felejtenek a tanulók. Ez a felmérő tehát nem arra való, hogy elmarasztaljuk az alsó tagozatos, vagy az általános iskolai tanítást. Csupán arra, hogy a tanár és a tanuló is lássa, mit kell pótolni, gyakorolni, hogy az új tanév anyagát rendesen el tudják végezni. (Egyébként többször ajánlottam tanár kollégáimnak, hogy magasabb évfolyamon olyan osztállyal is írassanak év elején dolgozatot, amelyet az előző évben ők tanítottak. Ilyen esetben is tapasztalják majd a felejtést, meglepő hiányokat fedezhetnek fel.)

Megengedhetetlennek tartom, hogy az 5.-es, I-ös év eleji felmérésre rossz jegyet adjunk. Itt számonkérésről szó sem lehet, hiszen nem tanítottuk még őket, nem tudjuk milyen körülmények között tanulhattak. Az új osztályba való beilleszkedésük, az új tanárok követelményrendszerének megoszlása éppen elég problémát okoz egy gyereknek. Ne kezdjük azzal, hogy rögtön rossz jegyet adunk. S ha valóban csak minimum szintű feladatokból áll a felmérő, akkor félrevezető lehet a jeles osztályzat is. Elképzelhető persze az is, hogy a felmérőbe gondolkodtató feladatokat is teszünk, s egy-két tanuló mind az alapismeretből, mint a gondolkodtatóbb feladatokból jól szerepel. Ilyen esetben azért meg lehet dicsérni a tanulót, s jeles is adható.

Több esetben sor kerülhet külső szakértők által összeállított felmérésre is. Ezek hasznosak lehetnek a tanító, a tanár számára. Valamelyest megmutatják, hogy az irányítás az egyes témákból, vagy az egyes évfolyamok anyagából mit tart lényegesnek. Mire érdemes nagyobb hangsúlyt fordítani, mit célszerű gyakorolni. (Természetesen az ilyen mérésre is érvényes, hogy még a fontos anyagrészekből sem lehet minden alkalommal mindent kérdezni). Ezek a mérések többnyire a külső szakértőnek fontosak. Például következtetéseket vonhat le a tanterv teljesítésével kapcsolatban, s több ilyen mérés esetén indokolt változtatások (javítások) is javasolhatók. Az egyes témák tanítása hatékonyabbá válhat. Az ilyen külső mérések szükségességét nem tagadva néhány problémára szeretném felhívni a figyelmet.

Újabban kezdenek elterjedni a feleletválaszolós tesztek. (Más országokban ilyeneket már régebben is alkalmaztak). Tagadhatatlan előnyük az egyszerű gépi kiértékelési lehetőség, ezért bizonyos esetekben elkerülhetetlenek. (Például 2000 jelentkező van 2 osztályra egy kéttannyelvű gimnáziumban.) Alapjában véve ezen mérés több meggondolandó kérdést vet fel. Nem azt érzem főproblémának, hogy gondolkodás nélkül, véletlenül is lehet a jó választ bekarikázni. Egy jól összeállított sok feladatos feladatlap esetén, ahol minden feladatra több lehetséges válasz közül kell a helyeset kiválasztani igen kicsi a valószínűsége, hogy tudás nélkül ér el a tanuló jó eredményt. Egészen egyszerű feladatok esetén sem érzek problémát a teszt alkalmazásakor. A dolgozatfeladatok zöme olyan, hogy az eredményhez több, különböző nehézségű lépés során juthatunk el. Dolgozatjavítás közben többször tapasztalhatjuk, hogy az eredmény ugyan jó, de közben két egymást kompenzáló hiba is van a megoldás menetében. Így a tanuló teljesítménye ebben a feladatban esetleg lényegesen gyengébb, mintha a helyestől eltérő eredményt egy elírás jellegű hiba okozta volna. Ha a tesztnél nem nézhetem át a tanuló munkáját, csupán a végeredményt értékelem, akkor könnyen nem megfelelő következtetést vonok le a tanuló (az osztály) teljesítményéről. Egyébként azt is problémának tartom, hogy ahogyan az írásbelik túlzott mértékű elterjedésével sok helyen a szóbeli feleltetés elsorvadt, s a tanulók beszédkészsége romlott, a tesztek túlzott elterjedése a leíró készség romlásához vezethet.

Néha azt tapasztalom, hogy a központi méréseknél a mérés értékelője erő-

sen extrapolál. Olyan következtetést von le, ami abból a konkrét mérésből nem állapítható meg. Nyilván a kitűzött konkrét példákkal kapcsolatban konkrét megállapítások tehetők, s ezek tanulságosak is. Leírhatjuk például, hogy a vizsgálatban részt vett tanulók 40%-a a 4. feladatban az egyenlet megoldásában rendezési hibát vétett. Ugyanakkor túlzásnak tartom leírni: „tehát a tanulók 40%-a nem tud egyenletet rendezni". Nem egyszer tapasztalhatja az ember, hogy ha egy dolgozatban 2-3 hasonló jellegű egyenletet ad, akkor van olyan tanuló, aki egyetkettőt jól megold, a harmadikban olyan hibát ejt, amit az előzőekben nem követett el. Ezen példája tehát valóban hibás, még sem mondhatom, hogy nem tud ilyen típusú feladatot megoldani (csupán ennyit: bizonytalan az egyenletrendezésben, vagy esetleg csak ennyit: figyelmetlen volt a rendezésnél, hanyagul írta le az előjelet, s ez a következő lépésben hibát okozott stb.).

Egy-egy azonos időpontban azonos feladatsorral íratott kerületi felmérésből is le lehet vonni néhány észrevételt, de jobb, ha az is a kitűzött feladatok elemzésére szorítkozik. Abból ugyanis, hogy egy mozgási feladatot sokan nem tudnak, vagy hibásan tudnak megoldani, levonhatjuk azt a következtetést, hogy ez a feladat (esetleg az ilyen típusú mozgási feladat) nem megy. Azt már merész következtetésnek tartom, hogy ebből megállapítsuk: „a tanulók nem tudnak szöveges feladatot megoldani". Lehet, hogy ha a dolgozatba nem mozgási, hanem keverékes, számjegyes stb. feladatot tettünk volna más (jobb vagy roszszabb) lenne a kép. Nem tartom helyesnek egy ilyen dolgozat alapján a kerület iskoláinak az összehasonlítását. Különösképpen akkor nem jó ez, ha a dolgozatot nem az év végi ismétlés utolsó szakaszában írathatták. A tanárok ui. az anyagot bizonyos mértékig szabad sorrendben taníthatják, s egy év közbeni dolgozatnál előfordulhat, hogy egy-egy feladattípusra (például mozgási feladatra) még az egyik osztályban nem került sor, míg a másik osztályban éppen ilyen feladatokat vettek az előző órákon. Más feladatsornál esetleg egészen más lenne az egyes osztályokban elért eredmény.

Természetesen egy-egy ilyen felmérés szolgálhat azért általános tanulságokkal is. Az például nem lehet véletlen, ha egy osztályban egy tanuló sem ellenőriz, míg másutt a tanulók többsége ezt megteszi. Az is mutat valamit, ha az osztály tanulói mind összevissza, rendetlenül írnak, számokat áthúznak, átírnak, míg a másik osztályban ilyen alig fordul elő. Ilyenkor az illető kolléga figyelmét felhívjuk, hogy a rendetlen, áttekinthetetlen munka mennyi hibaforrást jelent.

Helyesnek tartom viszont, ha egy iskolában a munkaközösség időnként évfolyamszinten írat dolgozatot. Ilyenkor célszerű a téma tanításának megkezdése előtt megállapodni a téma súlyozásában, s abban is, hogy milyen mértékben készíthetők fel a tanulók a dolgozatra. Nyilvánvalónak tartom, hogy az „agyongyakoroltatás", éppúgy félrevezető eredményt ad, mint amikor dolgozatba tervezett példákhoz hasonló példákat sem veszünk a megelőző gyakorló órákon. Nem érdemes erőltetni az évfolyam dolgozatot olyan esetekben, amikor az osztályok körülményei nagyon eltérőek. Például az egyik osztályt az előző évben három tanár is tanította, sok az elmaradás, míg a másik jó osztályban végig egy kézben volt a tanítás. Nem érdemes ilyenkor egy közepes szintű dolgozatot összeállítani, mert az a jónak gyenge lesz, a hátrányos helyzetű osztálynak pedig nehéz.

Előfordul néha, hogy egy sok évvel ezelőtt íratott központi dolgozatot ismét megíratnak, s az akkori és a mostani eredményekből vonnak le következtetéseket matematikatanításunk helyzetére vonatkozólag. Megállapítják, hogy milyen mértékben romlott vagy javult a helyzet. Ezt a módszert csak akkor tudom elfogadni, ha időközben sem a tantervi

anyag, sem az egyes témákra fordítandó idő sem a többi paraméter nem változott. Más esetekben az ilyen jellegű összehasonlítások teljesen félrevezetők. Egy ilyen dolgozattal például nem lehet azt igazolni, hogy általános iskolai matematikatanításunk ma lényegesen gyengébb, mint 20 évvel ezelőtt volt, mert az akkori és a mostani azonos felmérés ezt mutatja. Nyilvánvaló, hogy 20 évvel ezelőtt egy ilyen felmérésbe nem tehettek olyan feladatokat (például kombinatorikai jellegűt), amilyenekkel akkoriban nem találkozhattak a tanulók. Bizonyos anyagrészekre (például százalékszámítás) igen sok időt fordítottak akkor (többet a kelleténél), ugyanakkor ma jóval kevesebb (talán a kelleténél is kevesebb) jut rá. Természetesen egy ilyen típusú feladatban más lesz az eredmény, de nagy merészség ilyenekből azt a következtetést levonni, hogy mai tanításunk sokkal rosszabb, mint 20 évvel ezelőtt volt. Bizonyos területeken romlás van (s eléggé nagy baj, hogy alapvető dolgokban is, például szöveges feladatok megoldásában), másutt javulás (például elemi függvényekkel kapcsolatos ismeretekben). Nyilván ugyanolyan merész dolog lenne egy-egy ma jobban menő téma alapján matematikaoktatásunk nagyfokú javulásáról beszélni.

Egyébként is a legtöbb mérésnél az ismeretek tudását, alkalmazási szintjét vizsgálják, s csak kismértékben kerül elő a gondolkodás fejlettségének, nyitottságának vizsgálata. Igaz, hogy ez utóbbi lényegesen nehezebb dolog, nem minden szorítható be a 45 perces órakeretbe. Ugyanakkor matematikatanításunknak csak egyik fontos feladata az eszköz jellegű ismeretek tanítása, ugyanennyire lényeges a tanulókat logikus gondolkodásra nevelni. Félrevezető lehet az a kép, amit elsősorban a formális ismeretek tudásáról (illetve nem tudásáról) nyújtanak a felmérők, ha csak ebből akarjuk megítélni tanításunk hatékonyságát. Veszélyes is ez, hiszen tanítóinkat, tanárainkat félreinformálhatja, fontosabbnak mutatva a formális elemeket. Ez magára a tanításra nem szerencsésen hathat vissza.

Úgy gondolom a téma szinte kimeríthetetlen. Magáról az iskolai dolgozatok előkészítéséről, javításáról, értékeléséről vagy az érettségiről is lehetne részletesen írni. E cikkben, mint ahogy a címben jeleztem én csupán néhány, magamban hosszabb ideje érlelt észrevételt akartam megírni, s ezzel elgondolkodtatni a felméréseket összeállító kollégáimat. Tudom, hogy más típusú mérések is lehetnek, de egy rövid cikkben nem lehet teljességre törekedni.

AMBRUS ANDRÁS
adjunktus
ELTE, TTK
Budapest

A matematikaoktatás helyzete és perspektívái az Egyesült Államokban

III. rész

(School Mathematics, Options for the 1990—s.)

A legtöbb amerikai államban az iskolarendszer a következő: 6 éves alapiskola, 3 éves alsó középiskola és 3 éves felső középiskola. Az alapiskolában egy tanár tanít minden tárgyat egy osztályban.

Az alsó középiskolában heti 5 matematikaóra van, VII. osztályban algebra, VIII. osztályban bevezetés a síkgeometriába. Gyakran a fenti kurzusok helyett integrált kurzusok vannak, melyekben aritmetika, algebra és geometria is szerepel.

Az első jelentősebb reformmozgalom az 50-es évek végén, a 60-as évek elején volt. Elindításában jelentős szerepe volt az az első szovjet mesterséges hold sike-

res fellövésének, az amerikai pedagógiai irodalomban gyakran „szputnyik sokknak" nevezik ennek az oktatásra gyakorolt hatását.

A matematikatanítási reform főbb irányvonalai voltak: a matematika általánosan képző szerepének a megerősítése, az elméleti szint emelése.

Az elkészült oktatási segédletek minőségi szintjét erősen befolyásolta az a tény, hogy azokat főiskolai, egyetemi szakemberek készítették. Ennek következménye lett, hogy a modern matematika egyes részei és azok alkalmazásai is bekerültek a tananyagba, másrészt a szerzők törekedtek az absztrakciókra, általánosításokra. Sok esetben túlzottan formális, absztrakt lett a feldolgozandó anyag. Néhány jellegzetesség: a matematikai tananyag halmazelméletre és matematikai logikára épülő felépítése. A struktúra fogalmának bevezetése a középső, sőt esetenként az alsó szinten is. Általános törekvés volt a formalizáció. Példák: függvény mint speciális reláció definiálása, természetes logaritmus mint görbe alatti terület, racionális számok mint számpárok, s az elforgatás mint kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer került bevezetésre. A geometria oktatására is a formalizmus volt a jellemző. „Halál Euklideszre!" volt a jelszó. Alapvető figyelmet fordítottak az analitikus geometriára, a méretes geometria helyett az affin geometria került előtérbe.

Nagy hangsúlyt kaptak a különböző alapú számrendszerek, mondván, hogy ezek alapján a tízes számrendszert jobban elsajátítják a tanulók.

A reform nem érte el célját. A formális-logikai oldal túlhangsúlyozása, a tartalomtól elválasztott formális műveletek végzése, a halmazelméleti terminológia és szimbolika használata sok nehézséget okozott. Példa: a tanulóknak meg kellett mindig különböztetniök a számot, annak leírásától. Ez zavart okozott, hiszen az írásbeli műveletek végzése során nem számokkal, hanem azok írott jelével végezték a műveleteket. Az $y=x^2$ értelmezését a következőképp kellett tudni a tanulóknak: az x szimbólum helyettesíthető a valós számok halmazának tetszőleges elemével.

A tömegoktatásban nem hozhatott sikert ez a túlzott formalitásra való törekvés, megindultak az „ellenreformok" „Back to basics!" (Vissza az alapokhoz!) volt az újabb jelszó. Több pedagógiai szakember véleménye volt, hogy meg kell határozni a tömegoktatás számára a minimálisan elsajátítandó anyagot. Fő jellemző lett a praktikus szempont előtérbe helyezése, a gyakorlatban való szükségesség.

Jelentős tartalmi változások is történtek, új témák kerültek be az iskolai anyagba: valószínűségszámítás, matematikai statisztika, a programozás elemei.

A 70-es évek végén az amerikai matematikatanárok egyesülete (NACOMET) széles körű vizsgálatot végzett a matematikaoktatás területén. Sok kísérleti anyagot kifejlesztettek a tömegoktatás számára, s meghatározták a 80-as évek amerikai matematikaoktatásának irányvonalait, szervezési módjait, tananyagát, az eredmények ellenőrzési módjait. Főbb javaslatok:

1. A 80-as évek iskolai matematikájának a szöveges feladatok szerepének erősítése felé kell orientálnia.

Az amerikai oktatási gyakorlatban alapvető figyelem fordult arra, hogy a tanulók „mechanikus" jártasságokkal és készségekkel rendelkezzenek. Ezek ellenőrzése a különféle tesztekkel könnyen megvalósítható.

E negatív tendencia leküzdése céljából hangsúlyozott célként szerepel a javaslatban a feladatok megoldási módjainak a megtanítása, elsajátítása. A kitűzött feladatok lehetőleg a gyakorlati élethez közel állóak legyenek, fontos, hogy a tanulók meg tudják alkotni a probléma matematikai modelljét. Feltétlenül szükséges az eredményeknek a kezdeti szituációkkal való összevetése is. Lehetőség szerint kell alkalmazni a csoportmunkát is.

Kiemelt feladat a fizikával való tantárgyi koncentráció. A geometriatanítás-

ról: nem helyes felcserélni a szintetikus geometriát az analitikus geometriával, affin geometriát tanítani a méretes geometria előtt. A szintetikus geometria alapozza meg sok matematikai probléma grafikus illusztrációjának értelmezését, másrészről jelentősen fejleszti az intuíciót.

2. Túlzott jelentőséget tulajdonít a közvélemény a számolási készségnek, nem értékelik a szülők ilyen súllyal például az anyag értelmes elsajátítását, a tanult ismeretek különböző szituációkban való alkalmazását. A formális számolási készség helyett előtérbe kerülnek: gyakorlati problémák közelítő eredményeinek az értékelése, geometriai mérések végzése, grafikonok, táblázatok olvasása, értelmezése, eredmények előrejelzése matematikai módszerek segítségével, becslés, kerekítés, zsebszámológép, komputer használata, számolás közelítő értékekkel. Kitér a javaslat a térszemlélet fejlesztésének a fontosságára. Alapvető figyelmet kell fordítani a tanulók kommunikációs képességének a fejlesztésére, a logikus gondolkodás fejlesztésére, a definíciók szerepének megértésére, ellenpéldák keresésére.

Háttérbe kell szorítani olyan tevékenységeket mint: izolált számolási gyakorlatok trenírozása, írásbeli műveletek, olyan terminológia bevezetése, használata, amely sem a matematikában, sem a mindennapi életben nem használatos, függvénytáblázatok használata.

3. Az oktatás minden szintjén alkalmazni kell a zsebszámológépeket és komputereket. Az alsóbb osztályokban kisebb számkörben kell gyakoroltatni az alapműveleteket, s már itt meg kell kezdeni a zsebszámológéppel való ismerkedést. A felsőbb osztályokban nő ezen eszközök szerepe, néhány programozással kapcsolatos elméleti és gyakorlati kérdés is fölmerül. A javaslat kihangsúlyozza, hogy más tantárgyakban is szükséges a zsebszámológépek használata.

4. Meg kell teremteni a hatékony matematikaoktatás feltételeit. A tanároknak ismerniük kell a korszerű tanulástechnológiákat, pedagógiai elméleteket. Különös figyelmet kell szentelni a feladatmegoldás metodikájának. Meg kell határozni a feltétlenül szükséges tantervi minimumot.

5. A tanulók értékelése ne csak a hagyományos tesztmódszer segítségével történjék. Megfogalmazódott az az igény, hogy több jogot kell adni a tanároknak a tanulói tudás értékelésében, hiszen az osztályban a tanítás folyamán sok értékes információt gyűjtenek össze az egyes tanulókról.

6. Növelni kell a matematikakurzusokban részt vevők számát. A IX—XII. évfolyamokban az egyéves matematikai kurzust három évesre kell bővíteni.

Feltétlenül be kell venni a tananyagba a statisztika és a programozás elemeinek a tanítását.

1983 végén Madisonban tartottak egy matematikatanítási konferenciát 40 személy részvételével. A résztvevők között matematikusok, matematika-didaktikusok pszichológusok, számítógéptudománnyal foglalkozó szakemberek, az iskolai irányítási apparátusban dolgozók, matematikatanárok és tankönyvek, pedagógiai szakanyagok, tesztek és softverek kiadásával foglalkozó kiadók voltak. A konferencia célja a matematikaoktatás időszerű problémáinak a meghatározása és a 90-es évek matematikatanítási irányvonalainak a kijelölése volt.

Egyetértés volt a részt vevők között abban, hogy az egyik legsürgetőbb feladat a felső középiskolai matematikai kurzusokon részt vevő tanulók számának a növelése, hiszen ez feltétele sok irányban való továbbtanulásnak, s emellett megfelelő matematikai megalapozás nélkül sok szakmai iskola elvégzésére sincs lehetősége a tanulóknak.

További alappozíciók:

— A zsebszámológépeket és személyi számítógépeket minden szinten használni kell.

— Túl sok idő megy el a számolási alapműveletek gyakorlására.
— A statisztika elemeinek az ismerete minden tanuló számára alapvetően fontos, mégis kimarad a legtöbb iskolában a tananyagból.
— Az iskolai körülmények gátolják a matematikaoktatás hatékonyságának az emelését.

A konferencia öt alapterületet tekintett át: matematikatanulás, matematikatanítás, tanárképzés, pedagógiai kutatások, koordinációs kérdések.

A jelenlegi amerikai matematikaoktatásról

Az első hét évben közös matematikatanterv van. A tananyag elsősorban az egész számok és a pozitív racionális számok aritmetikája. További témák: mérések, geometriai iskolánként változik, de általában kis hangsúly tevődik rá. A legfőbb cél ezen iskolafokozatban egy sor írásbeli művelet készségszintű elsajátítása.

Az aritmetika kurzust egy kétéves előkészítő kurzus követi. Egy év algebra: algebrai kifejezésekkel való műveletek, egyenletek, egyenlőtlenségek, egy év geometria: Hangsúly a deduktív felépítésen, a bizonyításokon van. Azon tanulók, akik olyan vonalon kívánnak továbbtanulni, ahol szükséges a matematika, egy kétéves előkészítő analízis kurzust vehetnek föl. A továbbtanulni nem szándékozó tanulók számára egy egyéves kurzus van (általános matematika, kereskedelmi matematika, technikai matematika). Érdekes megfigyelni egy-egy korcsoport megoszlását. Algebra 67%, geometria 50%, magasabb szintű algebra 30%, előkészítő kurzus 20%.

Az összes tanulók 25%-a — felső középiskola — csak egy év matematikát tanul, 42% két évet, 33% három vagy több évet.

A munkaadók és az egyetemi szakemberek véleménye szerint a középiskolát végzettek matematikai tudása nem megfelelő. A tanulók többsége csak a számtani műveletekben jártas, többségük nem érti az alapvető matematikai koncepciókat, s nem képesek a tanultakat egyszerű problémahelyzetekben alkalmazni.

A konferencia résztvevői kihangsúlyozták, hogy az iskolai matematikaoktatásnak figyelembe kell vennie a zsebszámológépek és személyi számítógépek elterjedését, térhódítását a kereskedelemben, az iparban, irányításban, hadászatban.

A változtatás szükségességének néhány indoka:

1. Hasznossági szempont. A csúcstechnológia egyre több matematikai ismeretet kíván, sok szakma elsajátításához több matematika szükséges a jövőben. A számítógépek elterjedése, a robotok, a lézer alkalmazása ezer és ezer új állást jelent, de megfelelő felkészítéssel. A kívánatos matematikai ismeretek olyan területekre terjednek ki, mint adatelemzés, magyarázó statisztika, algoritmikus analízis, matematikai modellalkotás. Kétségtelen, hogy az iskolának más feladatai is vannak, nem csak ezen szakmákra felkészíteni a tanulókat, de lényeges felfigyelni az új vonatkozásokra. A megalapozott ismeretek nélkül a tanulók nem tudnak részt venni teljes hatékonysággal a holnap technológiai társadalmában. Az egyes konkrét szakmák gyors változása a matematikai alapképzés szükségességét helyezi előtérbe.

2. Jelentősen *kiterjedtek a matematika alkalmazási területei.* Lényeges változások történtek a társadalomtudományokban is. A számítógépek használata lehetővé teszi nagymennyiségű információ feldolgozását elemzését. Különösen a kereskedelemben, gazdaságban, nyelvészetben és a szociológiában terjedt el a számítógépek használata.

A hagyományos algebra, geometria, trigonometria, analízis kurzusok a mérnökképzés és a fizika alkalmazásaira való előkészítést szolgálták. Bár e területek fontosak, a jövőben a számítástudomány

alapelvei módosíthatják a jelenlegi helyzetet.

3. A számítógépek és kalkulátorok alkalmazásának hatással kell lennie a hagyományos matematikai koncepciók és eljárások tanítására, feldolgozási módjára. Átrendeződnek a hangsúlyok is. A bonyolult számítási eljárások, összetett algebrai kifejezésekkel való manipulálások elvégzését rá kell bízni a számítógépekre, hasonlóan a háromszögszámítási feladatokat sem szabad gép nélkül sulykoltatni. A felszabadult időben a problémamegoldásokra kell helyezni a hangsúlyt. Ugyancsak előtérbe kerül a matematikai modellalkotás az eredmények értékelése, értelmezése, érvényességük vizsgálata.

Néhány változtatási javaslat:

1. Be kell vezetni a zsebszámológépek és személyi számítógépek használatát a matematikaoktatásban olyan korán amennyire az lehetséges. Fel kell használni ezen eszközöket az aritmetika és geometria megértésére, a problémamegoldás előtérbe kerülésére.

2. Az eddigieknél nagyobb hangsúlyt kell helyezni a közelítő számításokra, becslésekre, lényegesen kevesebb időt kell fordítani az írásbeli műveletek sulykoltatására.

3. Meg kell ismertetni a tanulókat az adatelemzés alapjaival, módszereivel.

Középiskolai vonatkozások:

1. Végig kell gondolni a hagyományos algebra, geometria és analízis kurzusok tartalmának feldolgozási módját a számítógépek alkalmazása szempontjából.

2. Be kell venni a tantervbe olyan diszciplinákat mint diszkrét matematika, statisztika, valószínűségszámítás, számítógéptudomány. Programozástanítást legalább a főiskolára előkészítő kurzusba be kell venni.

3. A már részletezett NACOMET javaslatok közül kihangsúlyozást nyert a *problémamegoldás fontossága.* Minden oktatási szinten a matematikatanítás középpontjába kell állítani a problémák megoldásának tanítását. A matematikatantervet a problémák megoldása köré kell szervezni.

Feltétlenül figyelembe kell venni az új tantervek bevezetésénél a megelőző tantervi reformok negatív tapasztalatait. Akkor rövid idő alatt sok jó matematikai anyagot készítettek el a kutatócsoportok, de sok iskolában nem fogadták szívesen a javaslatokat: „A központból a periféria felé" elv ritkán válik be, a tanárok ilyen esetekben gyakran nem érzik „sajátjuknak" a tanítandó anyagot. Egy tanári vélemény a 60-as évek matematikatanításáról: „Az Önök matematikáját tanítom az én tanulóimnak." Ezért is tartotta fontosnak a konferencia az alulról jövő javaslatok figyelembevételét.

A másik fontos tény: egy koncepcionálisan átgondolt, jól előkészített anyag összeállításához sok idő kell. Az első lépés: irányelvek megfogalmazása és elterjesztése. A megfogalmazott irányelveknek tartalmazniuk kell minden szintre vonatkozólag tananyagot, annak időbeli elosztását, kiemelten az új témákat, a témák feldolgozási javaslatait, tanítási segédanyagokat és tanítási módszerre vonatkozó javaslatokat.

Ugyancsak tartalmazniuk kell a zsebszámológépek, tesztek, softverek felhasználásával kapcsolatos elképzeléseket is. Az első változatot egy kutatócsoportnak kell összeállítania, ez képezi az alapját az 1990-es évek matematika-tantervének.

A kutatócsoport munkájába be kell vonni tanárokat, matematikusokat, pedagógiai szakembereket, ipari szakembereket, iskolaügy irányításban dolgozókat, pszichológusokat, kiadókat.

Jelenleg rengeteg softver áll az iskolák rendelkezésére. Sajnos ezek mind tartalmi, mind pedagógiai szempontból kifogásolhatók, és a compabilitással is problémák vannak. Az új tantervi dokumentumok kidolgozásánál e szempontokra is tekintettel kell lenni.

A legfőbb cél úgy segíteni a tanárokat, hogy azok gondolkodásra neveljék ta-

nulóikat, legyenek a tanulók képesek a folyamatos tanulásra még az iskola befejezése után is, továbbá fel kell készíteni őket új szituációk, új feltételek, körülmények kezelésére. A tananyagfelépítést az alkalmazásokra kell alapozni, sok konkrét kísérletet kell a tanulókkal elvégeztetni, hogy legyen tartalmi alapja az absztrakcióknak.

Néhány javaslat a középiskolával kapcsolatban:

1. Az algebra és geometria tananyagot és alkalmazásokat egy egységes felépítésbe kell integrálni.
2. Minden tanuló és tanár számára elérhetővé kell tenni a zsebszámológépeket és a számítógépeket, s azokat használni is kell, ha ez indokolt.
3. Alternatív programokat is ki kell dolgozni.

A tervezetnek válaszolnia kell a következő kérdésekre:

1. Mely anyagrészek feldolgozása tehető hatékonyabbá zsebszámológépek és számítógépek segítségével, milyen szoftvereket kell ehhez kifejleszteni?
2. Milyen szoftverek alkalmasak a különböző oktatási módok realizálására? (Tanári demonstráció, osztályfoglalkoztatás, csoportmunka, egyéni munka).
3. Hogyan lehet a rendelkezésre álló szoftverek felhasználását értékesebbé, hasznosabbá tenni?
4. Milyen lehetőségeik vannak a tanároknak a felfelé való kommunikációra, annak a kifejezésére, hogy mit lehetséges megvalósítani és mit nem a javaslatokból?

A matematika tanításáról

Esettanulmányok alapján a következő tipikus kép alakult ki az amerikai matematikaórákról: előző napi feladatok megbeszélése, a nehezebb példákat a tanár vagy egy jobb tanuló a táblánál ismertetni, rövid magyarázat, az új anyag bevezetése, feladatok kitűzése a következő órára. Az óra hátralévő részében a kijelölt feladatok megoldása kezdődik, a tanár jár a tanulók között, megválaszolja az esedékes kérdéseket. S ez ismétlődik óráról órára.

Romberg és Carpenter három negatív jelenséget említettek meg a matematikatanítással kapcsolatban:

1. A matematikának mint statikus tudománynak a felfogása, melyben a hangsúly bizonyos koncepciók és eljárások megtanítására tevődik. Így a matematikaoktatás eltávolodik a valóságtól, a tanulók érdeklődésétől. A matematika olyan lényeges jellemzői, mint absztrakció, felfedezés, bizonyítás alkalmazások gyakran a háttérben maradnak.
2. Az idő nagy része az ismeretek, eljárások befogadására fordítódik, kevés idő marad egyéni kísérletezésekre, próbálkozásokra. Kísérletek bizonyítják, hogy a színvonalas tudás nem egyszerűen koncepciók és eljárások gyűjteménye, a tartós memóriabeli tudás az individuum által strukturált, folyamatosan változik.
3. A hagyományos osztálytanításban a tanár elsősorban szervező, irányító. Magyaráz, dönt a tanulók tevékenységét illetően, esetenként kontrollálja a tanulói teljesítményeket.

Összegezve: a matematikatanítás túlnyomórészt a saját tanításra vonatkozó reflexió, visszatekintés, elemzés nélkül folyik. A tanári szakma inkább procedurális, irányítás jellegű. A legtöbb tanár a fő kötelességének a tankönyvek megtanítását tartja. Nagyon kevés tanár látja, érzi, hogy a matematikatanítás fő célja, elsődleges feladata a tanulók problémamegoldó képességének fejlesztése, a problémák megoldásához szükséges matematikai módszerek elsajátítása és e módszerek alkalmazási képességének a fejlesztése.

Komoly problémát jelent az is, hogy a tanárok elszigetelten dolgoznak egymástól, ritkán van lehetőségük problémáik, tapasztalataik más kollégákkal való megbeszélésére, megvitatására, melyekre főleg az új témák tanításánál nagy szükségük lenne.

Túlhajtottak a tanárok, nincs idejük saját munkájuk elemzésére, az önreflexióra, munkájuk gondos tervezésére.

Fontos feladatok:

Több időt kell fordítani a tanórák tervezésére, a kis csoportokban való problémamegoldások tervezésére, realizálására. A tanítás során a problémamegoldási stratégiákra kell helyezni a hangsúlyt, nem pedig csak a konkrét eredményekre, tényekre.

A másik lényeges feladat a más tanárokkal való együttműködés, a tanári megújulás biztosítása, elősegítése. Ennek megszervezése az oktatásirányítási apparátusok — helyi és országos — feladata.

Tanárképzés

A tanárképzésben és a tanártovábbképzésben a fenti követelményeknek megfelelő új oktatási-nevelési programot kell kifejleszteni. Minden tanár számára biztosítani kell a megfelelő matematikai alapokat.

A matematikai alapképzésnek tükröznie kell a matematikatudomány jelenkori fejlődési irányait is.

Alapvető fontosságú a megfelelő pedagógiai felkészítés is.

A zsebszámológépek és számítógépek tudatos felhasználására a matematikaoktatásban fel kell készíteni a hallgatókat. A továbbképzésben jól bevált módszer: néhány tanár központi felkészítése, s e tanárok a környezetükben továbbadják a tapasztalataikat.

Kutatások

A fő probléma ezen a területen, hogy hogyan lehet a kutatási eredményeket az oktatási gyakorlatba átültetni.

Fő kutatási területek:
tanulás,
tanítás,
az iskolarendszer változtatása.

A jelenlegi matematikaoktatás a versengésre, szervezésre és a csoporthajlamokra fókuszál. A matematika mint eljárások és koncepciók fix gyűjteménye szerepel és olyan feltevés mellett folyik a tanítás, hogy a tanuló befogadja, abszorbálja a kívántakat. A modern tanulási kísérletek tanúsága szerint a *tanulás „konstrukció"* és nem „abszorbció" révén folyik le.

A kutatások azt mutatják, hogy az effektív tanítás sokkal több mint szervezés. Olyan dolgokat foglal magában, mint: a tanórák strukturálása, fejlesztése, megfelelő időbeosztás, kis csoportos foglalkozások, racionális tervezés, annak biztosítása, hogy a tanulók sajátjuknak érezzék a megszerzendő tudást.

Fölmerülnek olyan kérdések is, mint: mennyire relevánsak a pedagógiai kutatások a matematikaoktatáshoz, a pszichológiai és szociológiai modellek alkalmasak-e a matematikatanításba való átültetésre. E területek kutatói gyakran figyelmen kívül hagyják a matematikai szempontokat. Például a problémamegoldásokra vonatkozó tanulmányoknak kevés kapcsolatuk van a matematikai problémamegoldással, a laboratóriumi körülmények között végzett kutatások eredményei, következtetései gyakran nem realizálhatók osztálykeretek között. Nehéz, de fontos feladat a jelenlegi kutatások eredményei közül a relevánsak kiszűrése.

A konferencia résztvevői kihangsúlyozták, hogy a matematikatanítással, matematikatanulással kapcsolatos kísérletekbe be kell vonni a gyakorló tanárokat is. A kutatóknak szoros kapcsolatot kell kiépíteniök az osztályban tanító tanárokkal, csak úgy lesz életszerű a kísérlet, ha mindkét tábor közös felelősséggel határozza meg a kutatás témáját, tisztázza az alapelveket és konkrét kutatási kérdéseket fogalmaz meg.

A tanárképzés és tanártovábbképzés fontos feladat a tanárok felkészítése a kutatómunkára. A tanároknak képesnek kell lenniök a kutatási eredmények közvetítésére, a gyakorlatba való átültetésére.

MIHALOVICS SÁNDOR
középiskolai tanár
Esztergom

Néhány gondolat az egyenletek megoldását segítő apró ötletekről

Az egyenletek szerteágazó, változatos témakört ölelnek fel. Néhány típus — elsőfokú, másodfokú, törtes, gyökös, abszolút értékes, exponenciális, logaritmikus, trigonometrikus — a középiskolából jól ismert. Ismert az is — számhalmazoknál maradva —, hogy az egyenletek megoldhatóságáról vagy megoldhatatlanságáról csak akkor beszélhetünk, ha ezekhez egy-egy számhalmazt rendelünk. A megoldás pedig — amennyiben létezik — az egyenlethez tartozó számhalmaz azon elemeit jelenti, amelyek kielégítik az adott egyenletet. Ugyanakkor — másik értelmezés szerint — a megoldás módszert is jelent. Ha ehhez további feltételeket nem kötünk, akkor a megoldási módszer alatt — középiskolában — azt az eljárást értjük, amellyel algebrai úton úgy adhatók meg az egyenlet valós gyökei, hogy a megoldás részeljárásai sem vezetnek ki a valós számok köréből.

Természetesen, az egyenlet fogalmát más nézőpontból is megközelíthetjük. Az egyenlet a hozzá tartozó kiindulási halmazzal nem más, mint két függvény összekapcsolása az egyenlőség jelével, ahol a szóban forgó függvények közös értelmezési tartománya a kiindulási halmaz, vagy annak valamilyen részhalmaza. Az egyenlet megoldása pedig — amennyiben létezik — ezen függvények értelmezési tartományainak azon elemeit jelenti, amelyekre a két függvény azonos függvényértéket vesz fel.

Látnunk kell azt is, hogy az egyenletek elméletének fontos részét alkotják a több egyenletből álló egyenletrendszerek, ezért ezek megoldását különállóan vizsgálni nem érdemes.

Van olyan egyenlet, amelyik megoldható, van amelyik nem. Némelyiket könnyen meg tudjuk oldani, másoknál pedig esetleg kisebb-nagyobb ötletekre, „fogásokra" vagy akár trükkökre is szükség van.

Természetesen minden egyenlettípusnál lehetnek olyan egyenletek, amelyek megfelelő rövidséggel csupán bizonyos jól meghatározott megoldási úttal oldhatók meg, de legtöbbet talán ezekből az ötletekből mégis a gyökös egyenletek és a magasabb fokú egyenletek kívánnak meg.

Ha ezeket az ötleteket össze akarjuk gyűjteni, akkor az első helyen megemlíthetjük az egyenlet egy-egy oldalát jelentő függvények tulajdonságainak céltudatosabb bevonását az egyenletmegoldási folyamatba. Jelenti ez az értelmezési tartományok és értékkészletek elemzését, továbbá a függvények paritásának, periodicitásának vagy alaki viszonyainak ügyes, megoldásbeli felhasználását. De ide sorolhatjuk az ötletes helyettesítéseket, az ügyes átalakításokat, a számok helyettesítését paraméterrel, az egyenlet szimmetrikus tulajdonságainak felhasználását, továbbá bizonyos speciális egyenleteknél éppen ennek a specialitásnak a felismerését és megragadását az egyenlet megoldásában és így tovább.

A következőkben — a cikk szándékával összhangban — ezekből az ötletekből, kevésbé ismert, vagy akár helyenként rendhagyónak is nevezhető megoldási eljárásokból szeretnénk felvillantani néhányat. Mutassunk be belőlük néhányat konkrét feladatokban! A feladatok első csoportjánál a függvénytani vonatkozásokra helyezzük a hangsúlyt. Konkrétabban, az első három feladat megoldásánál az egyenleteket alkotó függvények értékkészletének vizsgálatára alapozunk. A negyedik feladat megoldásánál felhasználjuk az egyenletet reprezentáló függvény paritását és periodicitását.

Az ötödik és hatodik feladatnál pedig az egyenletet alkotó függvények monotonitását használjuk fel. Most pedig lássuk a feladatok első csoportját!

1. *feladat.* Bizonyítsuk be, hogy a

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = -2x^2+6x-9 \tag{1}$$

egyenletnek nincs gyöke a valós számok körében!

Megoldás: Legyen

$$f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto\left(\frac{4}{3}\right)^x \quad \text{és} \quad g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto -2x^2+6x-9.$$

Mivel $R_f=]0;\infty[$ és $R_g\subset\mathbf{R}^-$ továbbá $R_f\cap R_g=\emptyset$, ezért az (1) egyenletnek nincs gyöke.

2. *feladat.* Keressük meg a

$$2\cdot\cos(3x^2-x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} \tag{2}$$

egyenlet valós gyökeit!

Megoldás: Legyen

$$e\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto 2\cdot\cos(3x^2-x) \quad \text{és} \quad h\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}.$$

Ekkor $R_e=[-2;2]$ és $R_h=[2;\infty[$. Így $R_e\cap R_h=\{2\}$, ami viszont azt jelenti, hogy ha (2)-nek van gyöke, úgy ez csak olyan $x\in D_e=D_h$ lehet, amelyre $e(x)=h(x)=2$. A h függvény ezt csupán egyszer veszi fel éspedig $x=0$-nál. Így a (2) egyenlet egyetlen gyöke az $x=0$.

3. *feladat.* Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\cos^{120}x-\sin^{120}x=1 \tag{3}$$

egyenletet!

Megoldás: Írjuk át az egyenletet

$$\cos^{120}x=1+\sin^{120}x$$

alakra.

Legyen: $i\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto\cos^{120}x$ és $j\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\mapsto 1+\sin^{120}x$. $R_i\cap R_j=\{1\}$, következésképpen az $i(x)=j(x)$-et kielégítő x-ek egyben a (3) egyenlet megoldását is adják: $x=2k\pi\in D_i=D_j$, $k\in\mathbf{Z}$.

4. *feladat.* Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\sin 2x\cdot\cos^2 2x\cdot\sin^2 6x\cdot\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}3x=0 \tag{4}$$

trigonometrikus egyenletet!

Megoldás: A bal oldalon szereplő függvény páratlan és periodikus. A legbővebb értelmezési tartomány

$$R\setminus\left(\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{n\cdot\frac{\pi}{3},\ n\in\mathbf{Z}\right\}\right),$$

periódusa pedig π. Az alapgyökök tehát pl. a $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumból kerülhetnek ki, sőt, ha a korábbi megállapításainkat is figyelembe vesszük, úgy az alapgyökök vizsgálatát a $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$ intervallumra korlátozhatjuk. Ezen az alapgyökök $\frac{\pi}{6}$ és $\frac{\pi}{4}$. Természetesen ekkor a függvény páratlansága miatt alapgyökök a $-\frac{\pi}{6}$ és a $-\frac{\pi}{4}$ is. Ezek után — a függvény π periódusa miatt — a (4) egyenlet megoldásrendszere így írható:

$$x_1 = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi;$$

$$x_2 = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi; \quad k \in Z.$$

5. *feladat.* Az egész számok halmazán oldjuk meg a

$$3\sqrt{x^2-9} + 4\sqrt{x^2-16} + 5\sqrt{x^2-25} = \frac{120}{x} \tag{5}$$

egyenletet!

Megoldás: Ha az egyenletet klasszikus úton akarjuk megoldani, úgy a harmadszori négyzetre emelés után már bonyolult 16-od fokú

$$x^{16} - 50x^{14} - 4375x^{12} + 278\,800x^{10} + 1\,670\,600x^8 - 364\,700\,000x^6 +$$
$$+ 7\,641\,610\,000x^4 - 54\,468\,000\,000x^2 + 129\,600\,000\,000 = 0$$

egyenlethez jutunk, amellyel viszont már nem tudunk mit kezdeni.

Felvetődik a kérdés: milyen utat célszerű választani? Csak olyat, amely igazodik az egyenlet sajátosságaihoz. Az egyenlet bal oldala minden $\mathbf{Z} \ni |x| \geqq 5$ mellett pozitív, következésképpen az egyenlet megoldása az $[5; \infty[$ intervallum egészei között keresendő. Az x növelésével az egyenlet bal oldala nő, jobb oldala pedig csökken, ami pedig azt jelenti, hogy az egyenletnek legfeljebb egy valós gyöke lehet. Az $[5; \infty[$ intervallum legkisebb egésze az $x=5$ és ez ki is elégíti az egyenletet. Tehát az (5) egyenlet egyetlen megoldása az $x=5$.

6. *feladat.* Keressük meg a

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y &= x - y \\ \sin x + \sin y &= \sqrt{2} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

egyenletrendszer megoldását a $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumon!

Megoldás. Az egyenletrendszer második egyenletéből következik, hogy $\sin x$ és $\sin y$ pozitívak. Ebből — a kiindulási halmazt is alapul véve — pedig arra következtetünk, hogy $x, y \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. A további meggondolások megtételéhez írjuk át az egyenletrendszer első egyenletét $x - \operatorname{tg} x = y - \operatorname{tg} y$ alakban, így mindkét oldalon az

$$m: \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x - \operatorname{tg} x$$

függvény szerepel.

Legyen

$$m': \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbf{R},\ x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$$

Az értelmezési tartomány pozitív, ezért az m függvény szigorúan monoton növekedő ezen az intervallumon, tehát az $f(x)=f(y)$ kapcsolat csak úgy állhat fenn, ha $x=y$. Ennek figyelembevételével a második egyenletből kapjuk a (6) egyenletrendszer megoldását jelentő $x=y=\frac{\pi}{4}$-et.

A második feladatcsoport gyökös egyenleteinél a helyettesítésekre helyezzük a hangsúlyt. Nevezetesen, a hetedik feladatnál a megfelelő átalakítás kap szerepet. A nyolcadik és kilencedik egyenletnél a klasszikus helyettesítés fogja jelenteni a könnyítést. A tizedik feladatnál az egyenlet speciális szerkezetére fogunk összpontosítani. A tizenegyedik és tizenkettedik feladatnál pedig speciális helyettesítést, éspedig trigonometrikus függvényű helyettesítést fogunk alkalmazni. Most pedig lássuk a feladatok második csoportját!

7. *feladat.* A valós számok halmazán oldjuk meg a

$$\sqrt{x^2-9x+24} - \sqrt{6x^2-59x+149} = 5-x \tag{7}$$

egyenletet!

Megoldás: Már az egyenlet szemrevételezése is megerősít minket abban, hogy az irracionális egyenleteknél megszokott négyzetre emelési út kilátástalan nehézségeket rejt magában. Ilyenkor értelmét veszti az is, hogy az egyenlet elemeit jelentő kifejezések legbővebb értelmezési tartományát vizsgáljuk. Hiszen, ha a következményegyenlettel nem tudunk tovább lépni akkor azért, ha pedig ekvivalens egyenleten keresztül jutunk a megoldáshoz akkor pedig ez amúgy is feleslegessé válik. Válasszuk ezt az utat! Az $x=5$ kielégíti a (7) egyenletet. Az egyenlet további gyökeinek megkereséséhez osszuk el az egyenletet $0 \neq |5-x|$-kel. Ekkor a (7) egyenlet

$$\sqrt{1+\frac{x-1}{(5-x)^2}} - \sqrt{6+\frac{x-1}{(5-x)^2}} = \frac{5-x}{|5-x|} \tag{8}$$

alakot vesz fel. Vezessük be az $y=\frac{x-1}{(5-x)^2}$ helyettesítést. Ha $x<5$, akkor az előbb említett helyettesítéssel (8) a $\sqrt{1+y} - \sqrt{6+y} = 1$ egyenletbe megy át. Ennek valós számok körében nincs megoldása, amiről könnyen meggyőződhetünk. Ha $x>5$, akkor (8) további alakja

$$\sqrt{1+y} - \sqrt{6+y} = -1. \tag{9}$$

Ennek gyökei: $x_1=4$ és $x_2=\frac{19}{3}$. Ezek közül csupán $x=\frac{19}{3}$ tesz eleget az $x>5$ feltételnek, s így gyöke a (7) kiindulási egyenletnek, hiszen a (7) és (9) alatti egyenletek egyenértékűek a $]5; \infty[$ intervallumon. Összegezve: a (7) egyenlet gyökei $x_1=5$ és $x_2=\frac{19}{3}$.

8. *feladat.* Keressük meg a

$$x^2+\sqrt{x+5} = 5 \tag{10}$$

egyenlet valós gyökeit!

Megoldás: Vezessük be a $Z=\sqrt{x+5}$ helyettesítést. Ezzel a jelöléssel a (10) egyenlethez az

$$x^2+Z=5$$

$$x+5=Z^2$$

egyenletrendszert rendelhetjük, amely viszont a $(Z+x)(Z-x-1)=0$ egyenleten keresztül vezet el a $\sqrt{x+5}+x=0$, illetve $\sqrt{x+5}=x+1$ irracionális egyenletekhez. Ezek megoldásai a kiindulási egyenlet gyökeit adják. Így a (10) egyenlet valós gyökei:

$$x_1=\frac{1-\sqrt{21}}{2},\quad x_2=\frac{\sqrt{17}-1}{2}.$$

9. *feladat.* Adjuk meg a

$$7\sqrt{4x^2+5x-1}-14\sqrt{x^2-3x+3}=17x-13 \tag{11}$$

egyenlet valós gyökeit!

Megoldás: Vezessük be az $a=\sqrt{4x^2+5x-1}$, $b=2\sqrt{x^2-3x+3}$ és a $7c=17x-13$ jelöléseket. Ezekkel az $a-b=c$ és az $a^2-b^2=7c$ egyenleteket írhatjuk fel. Ha $c=0$, akkor $a=b$, ami $5x-1=-12x+12$ kapcsolaton keresztül a (11)-t kielégítő $x_1=\frac{13}{17}$ gyököt adja. Ha $c\neq 0$, akkor $a+b=7$ és ez az $a-b=c$ egyenlettel $2a=7+c$ egyenletté formálható. Ez a bevezetett jelölés alapján a $14\sqrt{4x^2+5x-1}=$ $=17x+36$, négyzetre emelés után pedig a $495x^2-234x-1492=0$ egyenletet adja. Ennek gyökei $x_2=2$, illetve $x_3=-\frac{746}{495}$. Mindkettő gyöke (11)-nek is. A kiindulási egyenletnek tehát három valós gyöke van és ezek: $\frac{13}{17}$, 2, $-\frac{746}{495}$.

10. *feladat.* Határozzuk meg a következő egyenlet valós megoldásait!

$$x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}. \tag{12}$$

Megoldás: Tekintsük az $\mathbf{a}(x;1)$ és a $\mathbf{b}\left(\sqrt{1+x};\sqrt{3-x}\right)$ vektorokat és határozzuk meg abszolút értéküket. A szóban forgó vektorok abszolút értéke:

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{x^2+1},\quad |\mathbf{b}|=\sqrt{(1+x)+(3-x)}=2.$$

Ezekkel a (12) egyenlet az $\mathbf{ab}=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$ alakot veszi fel. Ez pedig azt jelenti, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok párhuzamosak, azaz:

$$\frac{\sqrt{1+x}}{x}=\sqrt{3-x},\quad x\neq 0.$$

Az utóbbiból az $x^3-3x^2+x+1=(x-1)(x^2-2x-1)=0$ egyenlethez jutunk. Mivel $x\in]0;3[$ a (12) egyenlet gyökei: $x_1=1$, $x_2=1+\sqrt{2}$.

11. *feladat.* Adjuk meg a következő egyenlet valós megoldásait!

$$\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}. \tag{13}$$

Megoldás: Az egyenlet gyökei csak olyan valós számok lehetnek, amelyekre teljesül az $|x| \leqq 1$ feltétel. Emiatt célszerű alkalmaznunk az $x = \cos \alpha$ helyettesítést, amellyel a (13) egyenlet a következőképpen írható:

$$\sqrt{2} \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \cos 2\alpha + 2 \sin \alpha |\sin \alpha| \tag{14}$$

Mivel $\alpha \in [0; \pi]$ ezért $\sin \frac{\alpha}{2} \geqq 0$, illetve $\sin \alpha \geqq 0$, s így a (14) egyenlet a $\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$ alakot veszi fel, amely viszont a $\sin\left(\frac{3\alpha}{4} + \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{5\alpha}{4} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$ egyenletté alakítható át. Ennek gyökei:

$$\alpha_1 = -\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} k, \quad k \in Z,$$

$$\alpha_2 = \frac{3\pi}{10} + \frac{4\pi}{5} n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Ezek közül a $[0; \pi]$ intervallumban csupán az $\alpha = \frac{3\pi}{10}$ esik, így a (13) egyenlet egyetlen megoldása az

$$x = \cos \frac{3\pi}{10}.$$

Természetesen a $\cos \frac{3\pi}{10}$-et kifejezhetjük a gyökök segítségével is, ha felhasználjuk a $\sin 36° = \cos 54°$ egyenlőségből nyerhető $\sin 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ összefüggést. Ezzel most már a keresett gyök így is írható:

$$x = \frac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

12. *feladat.* Mely valós számhármasok elégítik ki a

$$\left.\begin{aligned} 2x + x^2 y &= y \\ 2y + y^2 Z &= Z \\ 2x + Z^2 x &= x \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

egyenletrendszert?

Megoldás: Mivel $|x| \neq |y| \neq |Z| \neq 1$ a (15) egyenletrendszert írjuk át vele egyenértékű egyenletrendszerré a következőképpen:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{2x}{1 - x^2} \\ Z &= \frac{2y}{1 - y^2} \\ x &= \frac{2Z}{1 - Z^2} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

A kétszeres szögek függvényei köréből jól ismert a $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ összefüggés, amely az egyenletrendszer megoldásához helyettesítési ötletet adhat. Legyen $x=\operatorname{tg}\alpha$, ahol $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right\}$. Ezzel a (16) egyenletrendszer így írható:

$$\left.\begin{aligned} y &= \operatorname{tg} 2\alpha \\ z &= \operatorname{tg} 4\alpha \\ x &= \operatorname{tg} 8\alpha \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

A helyettesítés figyelembevételével és a (17) egyenletrendszer harmadik egyenlete alapján a $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 8\alpha$ trigonometrikus egyenletet írhatjuk fel. Ennek megoldása $\alpha = k\frac{\pi}{7}$, ahol $k \in \mathbf{Z}$. Így az egyenletrendszer megoldásai:

$$x = \operatorname{tg}\left(k\frac{\pi}{7}\right), \quad y = \operatorname{tg}\left(k\frac{2\pi}{7}\right),$$

$$Z = \operatorname{tg}\left(k\frac{4\pi}{7}\right); \; k \in \{-3; -2, -1; 0; 1; 2; 3\},$$

A harmadik feladatcsoport magasabb fokú avagy ezekre vezető más típusú egyenleteket foglal magában. Külön kiemelhetnénk azokat a negyedfokú egyenlettípusokat amelyek megfelelő helyettesítéssel „szimmetrizálhatók". Ezek közé sorolhatjuk az **R** halmazon megoldandó $(x-a)^4+(x-b)^4=c$ típusú egyenleteket, ahol $a, b, c \in \mathbf{R}$. Ez az egyenlettípus az $y=x-\frac{a+b}{2}$ helyettesítéssel bikvadratikus egyenletre vezet. Továbbá itt említhetjük az **R** halmazon megoldandó $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=S$ egyenletet is, ahol az $S \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ és $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, ha fennáll közöttük pl. az $a-b=c-d$ kapcsolat. Ekkor ez az egyenlet is bikvadratikus egyenletre vezet, az $y=x-\frac{b+c}{2}$ helyettesítés mellett.

Mindemellett megemlíthetjük a „parametrizációt", amikor az egyenlet ismert tagját paraméterként kezeljük azért, hogy ez megkönnyítse az egyenlet megoldását. Ugyanakkor a magasabb fokú egyenleteknél sem szabad megfeledkeznünk a trigonometrikus függvényeken alapuló helyettesítésről, ha ez kedvező megoldásrövidítési lehetőségekkel kecsegtet. De vizsgáljuk meg ezeket a harmadik feladatcsoport konkrét feladatain!

13. *feladat.* Keressük meg az

$$(x^2-4x)^2+2(x-2)^2 = 43 \tag{18}$$

egyenlet valós gyökeit!

Megoldás: Legyen $y=x-2$. Ezzel a helyettesítéssel a (18) egyenlet

$$y^4-6y^2-27 = 0$$

bikvadratikus egyenletre vezet. Ebből $|y|=3$, s így a (18) egyenlet gyökei: $x_1=-1$, $x_2=5$.

14. *feladat.* Adjuk meg az

$$x^2+\frac{25x^2}{(x+5)^2}=11 \tag{19}$$

egyenlet valós gyökeit!

Megoldás: Írjuk át a (19) egyenletet az alábbi alakra:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{5}\right)^2}=1. \tag{20}$$

Alkalmazzuk az $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{10}$ helyettesítést. Ezzel a (20) egyenlet $11y^4-\frac{222}{10^2}y^2-$ $-\frac{189}{10^4}=0$ egyenletté írható át, amelyből $|y|=\frac{\sqrt{21}}{10}$-nek adódik. Figyelembe véve a helyettesítést a (19) egyenlet gyökeiként $x_{12}=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$-t kapjuk.

Talán nem haszontalan megjegyezni, hogy más úton is célravezető lehet. Így pl. ha a (19) egyenletet $\frac{x^2}{x+5}\left(\frac{x^2}{x+5}+10\right)=11$ alakra hozzuk, akkor a megfelelő helyettesítés és megoldás további része már szinte nyilvánvalóvá válik.

15. *feladat.* A valós számok halmazán oldjuk meg a

$$4\sqrt{x}+\sqrt{4-x^2}=4+x \tag{21}$$

egyenletet!

Megoldás: Alkalmazzuk a $Z=\sqrt{x}$ helyettesítést. Ekkor a (21) egyenlet $\sqrt{4-Z^4}=$ $=(Z-2)^2$ alakra hozható. Ezt az utóbbit négyzetre emelve, majd rendezve a

$$Z^4+(Z-2)^4=4 \tag{22}$$

egyenlethez jutunk. Legyen $u=Z-1$. Ezzel a helyettesítéssel a (22) egyenlet u^4+ $+6u^2-1=0$ bikvadratikus egyenletre vezet, amiből $|u|=\sqrt{\sqrt{10}-3}$-nak adódik. Ennek felhasználásával nyerjük a (21) egyenlet gyökeit, amelyek:

$$x_{1,2}=\left(1\pm\sqrt{\sqrt{10}-3}\right)^2.$$

16. *feladat.* Mely valós számpárokra teljesül az

$$\left.\begin{aligned}(x+y-2)^4+(x+y)^4&=82\\ x^2-y^2&=3\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

egyenletrendszer?

Megoldás: Tekintsük a $Z=x+y$ helyettesítést. Ezzel a (23) egyenletrendszer első egyenlete a

$$(Z-2)^4+Z^4=82 \tag{24}$$

egyenletbe megy át. Alkalmazzuk most a $W=Z-1$ helyettesítést. Ezzel a (24) egyenlet $W^4+6W^2-40=0$ bikvadratikus egyenlet alakját veszi fel. Ebből $|W|=2$-

nek adódik. Ezért $Z_1=3$ és $Z_2=-1$, s így a (23) egyenletrendszer kielégítő számpárok: $x_1=2$, $y_1=1$ és $x_2=-2$, $y_2=1$.

17. *feladat.* Keressük meg az

$$x^6-7x^2+\sqrt{6}=0 \tag{25}$$

egyenlet valós gyökeit!

Megoldás: Átmenetileg jelöljük $\sqrt{6}$-t b-vel. Ekkor a (25) egyenlet

$$x^6-(b^2+1)x^2+b=0 \tag{26}$$

alakot ölti. Ez b-re nézve másodfokú egyenlet. Mivel $x\neq 0$, a (26) egyenlet gyökei

$$b_1=x^2 \quad \text{és} \quad b_2=\frac{1-x^4}{x^2},$$

s így (26) a gyöktényezős alakja:

$$(b-x^2)\left(b-\frac{1-x^4}{x^2}\right)=0.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy a kiindulási egyenletet visszavezethetjük az $x^2=b$, illetve az $x^4+bx^2-1=0$ egyenletek megoldására. Az elsőből $|x|=\sqrt[4]{6}$-t, a másodikból pedig $|x|=\sqrt{\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{10}}{2}}$-t kapjuk. Ezek a (25) egyenlet keresett gyökei.

18. *feladat.* Adjuk meg a

$$8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)=1 \tag{27}$$

egyenlet valós gyökeit a $]0;1[$ intervallumon!

Megoldás: Mivel $x\in]0;1[$, ezért célszerű bevezetni a $t=\arccos x$ helyettesítést.

Ekkor:

$$\cos t=x, \quad \cos 2t=2x^2-1,$$

$$\cos 4t=2(2x^2-1)-1=8x^4-8x^2+1.$$

Ezekkel a (27) egyenlet

$$8\cos t\cdot\cos 2t\cdot\cos 4t=1 \tag{28}$$

trigonometrikus egyenletté formálódik.

A feladat ennek a megoldása. Évégből szorozzuk meg az egyenletet $\sin t$-vel. Ez nem fogja kibővíteni a gyökök halmazát, hiszen $t\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, s így a (28) új alakja $\sin 8t=\sin t$. Ennek megoldása:

$$t_1=\frac{2\pi}{7}, \quad t_2=\frac{\pi}{9}.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy a (27) egyenlet gyökei:

$$x_1=\cos\frac{2\pi}{7}, \quad x_2=\cos\frac{\pi}{9}.$$

Természetesen a megoldási ötletek sorát tovább lehetne folytatni, avagy ki lehetne terjeszteni egyéb, itt meg nem említett egyenlettípusokra is, de mindemellett — a tárgyalásba bevont feladatokkal — talán sikerült rámutatni arra, hogy a középiskolai matematika még sok, helyenként nem kellően kiaknázott lehetőséggel rendelkezik.

ÚJVÁRI ISTVÁN
vezető tanár
Vác

Sakkmatematikát tanítottam

A sakk és a matematika rokonságát matematikatanárok számára nem kell sok érvvel bizonygatni. Aki nem éri be egy közelmúltban megjelent szakmunka előszavában található szellemes megállapítással („A sakkjátszma problémáinak megoldása voltaképpen matematikai gyakorlat, a sakkjáték pedig szinte matematikai dallamok elfütyülésének fogható fel.") [1], annak pszichológiai, illetőleg sakk- és matematikatörténeti igazolással is szolgálhatunk:

Ha összevetjük a matematikai gondolkodásra való képességeket (2) a sakkozó pszichogramjával [3], a „metszetben" a következőket találjuk: absztrakciókészség, fantázia, memória, türelem, kitartás, önkontroll, önbizalom.

Ha a sakk- és matematikatörténetnek csak azokat az alakjait soroljuk fel, akik *mindkét* terület szakmunkáiban [4] szerepelnek, a névsor akkor is impozáns: Newton, Leibniz, Euler, Gauss, Poincaré, Vész János Ármin, Szily Kálmán, Neumann János.

A magyar iskolai sakkozás közel 9 évtizedes történetét feldolgozó tanulmány [5] alapján feltétlenül ide kívánkozik három matematikatanár neve: Rátz Lászlóé, aki már 1906-ban sakkrovatot indított az általa szerkesztett KÖMAL-ban, dr. Schwarz-Eggenhofer Arthúré, aki az egyik legnagyobb hatású ifjúsági lapnak a Zászlónknak volt hosszú évekig a sakkrovatvezetője és Neukomm Gyuláé, akit a KÖMAL szerkesztőjeként és a Magyar Sakkvilág munkatársaként is számon tartanak.

Érdekes megfigyelést tehet az, aki az évenként megrendezett középiskolás sakkcsapatbajnokság országos döntőjére ellátogat: a kísérő tanároknak kb. a kétharmada matematikaszakos, s közülük soknak a nevét tanítványai tették ismertté az országos matematikaversenyeken elért eredményeikkel.

Pedig — tanulói szemszögéből nézve — a matematikával és a sakkal való magasabb szintű foglalkozást általában nem könnyű összeegyeztetni, lévén mindkettő meglehetősen időigényes terület. A matematikai versenyfeladatok megoldása és a sakk megnyitáselméletének naprakész tanulása egyaránt egész embert kíván. Az egyeztetési kísérletnek általában két módja ismert: vagy sakkversenyzőket nevelnek (akik között persze leggyakoribb a jó matematikus), vagy az országos matematikai versenyekre koncentrálnak, s ebből spontán „kijön" egy kiváló sakkcsapat is. (Például az utolsó 2 évben a budapesti Árpád Gimnázium csapata ezüstérmes lett, először a Fazekas Mihály, majd az Apáczai Csere János Gyakorló Gimnáziumok csapatai mögött.) Ha egy ilyen élmezőnyben mindkétszer bronzérmes egy vidéki szakközépiskola, az már sikernek számít. Mégis arra gondoltam: a matematikát és a sakkot a két terület versenyeredményein kívül más módon is össze lehetne kapcsolni.

Erre kaptam lehetőséget iskolámban, a váci Lőwy Sándor Ipari Szakközépiskolában az elmúlt tanévben. „Sakkmatematika" néven szereplő, heti 1 órás, kötelezően választható, órarendbe ikta-

tott tárgyat taníthattam az egyik első osztályunk fél tanulócsoportjában, általam szerkesztett feladatlapok felhasználásával. Az iskola más osztályaiba járó, a feladatok iránt érdeklődő tanulók heti megfejtési verseny formájában kapcsolódhattak be a munkába.

A sakkmatematika bevezetését kiváltó ötlet egy megoldatlan tehetséggondozási probléma volt. A szakközépiskolákba ugyanis nagy tömegű, a matematika iránt érdeklődő, tehetséges gyerek kerül, akiknek matematikai tehetséggondozása még mindig nem tekinthető megoldottnak, jóllehet az utóbbi években jelentős e téren az előrehaladás. (Például az országos tanulmányi versenyeken már iskolatípusonkénti kategóriák vannak.) A „pályázati" (otthoni feladatmegoldó) típusú versenyeken azonban még elsöprő a gimnazisták fölénye.

(Elég egy pillantást vetni a KÖMAL pontversenyeire.) Itt is történtek ugyan próbálkozások: az ún. „C" jelű gyakorlatokat elsősorban a szakközépiskolásoknak szánják, akik „nem tudnak megbirkózni a ‚trükkös' megoldást igénylő példákkal" [6]. Az eredménylista azonban azt mutatja, hogy ez a verseny sem vált népszerűvé a szakközépiskolákban. (Még kevésbé a KÖMAL egyéb pontversenyei.) Ennek okát abban látom, hogy a KÖMAL feladataiban és gyakorlataiban túl sok az olyan ismeretanyag, „fogás", amelyet ugyan az általános iskolai szakkörön, versenyen, fakultáción nem volt nehéz megszerezni, akik azonban ehhez hozzájutottak, akiket már általános iskolás korukban elkezdtek matematika-versenyzőkké nevelni, azok a gimnáziumi iskolatípust választották. A szakközépiskolákba kerülő, „második vonalbeli" matematikai tehetségek számára egy olyan feladatanyag kell, amelyben nem ütközik ki annyira az indulásbeli hátrány. Két fejezet szinte magától adódik: *a kombinatorika és a gráfelmélet.* Mindkettő „igen egyszerű fogalmi apparátussal dolgozik, s emellett változatos, ötletekben gazdag feladatanyagot kínál a legegyszerűbbtől igen magas bonyolultsági fokig" [2]. S miután a matematika e két fejezete számos olyan problémát tartalmaz, amelyek sakk témakörűek, s megoldásukkal nem kisebb nagyságok, mint Gauss és Euler is foglalkoztak, ezután már magától adódott a feladatválogatási koncepció: a sakk és a matematika határterületéről vett, ún. „sakkmatematikai" feladatok összegyűjtése, készítése és didaktikai egységekbe való foglalása.

A tantárgy megszervezése úgy kezdődött, hogy az iskola legerősebbnek ígérkező I. osztályában a heti 4 órás matematika-óraszámot 1-gyel növeltük. Ebben az órában 10 tanuló „sakkmatematikát" tanult, míg 19 a történelem szakos osztályfőnök vezetésével könyvtári foglalkozáson vett részt. Az iskola többi osztályaiból — elsősorban a sakk- és matematikaversenyek résztvevőiből — még kb. 10 fő vett részt rendszeresen a munkában. Így 20-an kapták meg hétről hétre a feladatsorokat. Rajtuk kívül voltak még alkalmi feladatmegoldók is, akik a SAKKMATEK elnevezésű folyosói faliújságról informálódhattak. Itt voltak olvashatók a megoldások és a pontverseny állása is.

10 tanulót a 29-es létszámú osztályból általános iskolai matematika-versenyfeladatok megoldásával, illetőleg egy önismereti teszt segítségével válogattam ki. Az iskola többi osztályaiba járó érdeklődők ezekhez önkéntes alapon csatlakozhattak, akár 1-1 feladatsor megoldására is.

Az óra általában a tanulói megoldásokhoz fűzött megjegyzésekkel kezdődött, melyet a pontverseny állásának ismertetése követett. Majd az új feladatlapot osztottam ki, melynek egyik feladatát és a megoldásához szükséges elméleti tudnivalót megbeszéltük. (Ezek nem kerültek kitűzésre.) Természetesen, a tanári magyarázat bizonyos előnyt biztosított az elsősök számára, amit azonban kiegyenlített a felsősök nagyobb tapasztalata. A hétfőn kézhez vett feladatlapokat pén-

tekig lehetett megoldani. A tanári javító munka így a hét végére esett. 1-1 feladat keretében 100-100 pontot osztottam ki a kb. 20 feladatmegoldó között a megoldás minőségének figyelembevételével. Így a könnyebb feladatoknál általában 5-6 pontot lehetett elérni. Előfordult azonban 50 pontos teljesítmény is, amikor csak két hibátlan megoldás akadt. Ha a versenyző átlépte valamelyik 100-as ponthatárt, 1 db jelest kapott. (Ezt a matematikatanári munkaközösség minden tagja elfogadta.) A tanév végén az iskola jutalmazta a legjobbakat.

A feladatanyag természetesen kulcskérdés. Az egész éves tananyagot 167 feladat képezte. Ezek nagyobb része sakk szövegezésű, matematikai tartalommal, kisebb része pedig matematikafeladat, melynek *megoldását* segíti elő a sakkjáték ismerete. (Pl. a tábla mezőinek színezése.) Néhány fejezetben kissé távolinak tűnhet a sakkal való asszociáció. (Pl. a Fibonacci-féle számok, a bűvös négyzetek, a latin négyzetek stb.) Ezek viszont rendkívüli érdeklődést keltő fejezetek, melyek tárgyalás közben igen sok matematikatörténeti ismeret jön elő. A matematikai tartalmat illetően legtöbb feladat a kombinatorika és a gráfelmélet témaköréből való, de szép számmal akadtak a középiskolában tárgyalt, illetve alig érintett fejezetekhez tartozók is. (Számsorozatok, elemi geometria, számelméleti alapismeretek, illetve paradoxonok, bizonyítási módszerek, logikai feladatok stb.) A feladatanyag 34 feladatlapra bontva, hetenként, folyamatosan került a 20 tanuló kezébe.

A sakkmatematika órák tapasztalatai a következők voltak:

A tanulók érdeklődésével nem volt baj. Csaknem mind a 20 tanuló (az órára járó elsősök és a megoldási versenyben részt vevő felsősök) rendszeresen oldották meg a feladatokat, természetesen, eléggé eltérő színvonalon. Ennek főleg a viszonylag rövid (hétfőtől péntekig tartó) megoldási idő volt az oka. Ezért talán jobb lett volna egy kéthetenkénti 2 órás szervezésű tárgy, mely így hétvégi megoldási lehetőséget is biztosított volna. A megoldások között ötletes, sajátos tanulói gondolkodást tükröző bőven akadt.

A felsős tanulók többször szóvá tették azt az előnyt, amelyet az elsősök élveztek az új feladatokra való „ráhangolásban". Ez a hátrány kiegyenlíthető lett volna pl. egy délutáni szakkör megszervezésével, ami azonban a zsúfolt órarendek miatt megoldhatatlan. Így inkább a hirdetőtáblára kitűzött mintafeladatok mellé adtam több információt.

Néhány sakkversenyző csalódását fejezte ki amiatt, hogy a feladatokban „túl kevés a sakk". Úgy gondolták, hogy legalább fele-fele arányban szerepel majd a két terület. Természetesen, ez nem valósulhatott meg, hiszen a *cél* a matematikai tehetséggondozás fejlesztése, amelynek csak *eszköze* a sakk tartalmú feladatanyag.

A sakkmatematika szélesebb körű elterjeszthetőségére vonatkozó véleményem:

1. Három iskolatípusban — az általános iskola 8. osztályában, a gimnázium és a szakközépiskola I. osztályában bevezethetőnek vélem, akár fakultáció, akár szakkör formájában, vagy házi feladatmegoldó pontversenyként. A magas óraszámok miatt legnehezebb a megvalósítás a szakközépiskolában, bár itt volna rá a legnagyobb szükség, a már kifejtett okok miatt. Elképzelhető KÖMAL pontversenyként is.

2. A sakkmatematikát felvállaló szakkörvezető tanárnak nem kell komolyabb sakkismeretekkel rendelkeznie, mert a feladatok sakktartalma minimális. (A tábla és a bábok menetmódjának ismerete, a matt és a patt fogalma is elegendő kezdetben.)

3. Legnehezebb a feladatanyag összeszedése, mely igencsak szétszórva található a matematikai, sakk- és fejtörőirodalomban. Én pl. a 167 feladatot 45 forrásmunkából, valamint a KÖMAL és A Matematika Tanítása több évfolya-

mából válogattam. Jelentős részüket át is kellett dolgoznom. Hogy a téma sokszínűségét megmutassam, közlöm az alábbi feladatokat, néhány megjegyzés kíséretében. (A feladatok zömét kitevő kombinatorikai és gráfelméleti témájúakat e válogatásban szándékosan nem szerepeltettem.)

Néhány sakkmatematikai feladat

1. A sakktábla 64 mezője egy négyzetes hálót alkot. Ezen a hálón sok különböző méretű és helyzetű négyzet található. Összesen mennyi? Mekkora ezek összterülete? (A VII. Öveges József Emlékversenyen kitűzött feladat volt.)

2. Egy 8×8 méteres terem két átlósan szemközti sarkában két 1 m²-es kályha áll. Le lehet-e fedni a padlót — a kályhák kivételével — 2×1 m-es műanyaglapokkal anélkül, hogy azok közül egyet is kettévágnánk? (A feladat alapötlete Neumann Jánostól származik.)

3. Két sakktáblamintás, 60×60, illetve 80×80 cm-es szőnyegből 100×100 cm-es, ugyancsak sakktáblamintás szőnyeget kell készítenünk úgy, hogy
— mindkét szőnyeget legfeljebb két darabra vágjuk szét;
— egyik mezőt sem vágjuk szét.
Tervezd meg a szétvágást! (Meglehetősen nehéz átdarabolási feladat.)

4. Írjunk a sakktáblára olyan legnagyobb sugarú kört, amely egyetlen világos mezőt sem metsz. Számítsuk ki a kör sugarát, ha egy mező 6 cm oldalhosszúságú négyzet! (Pitagorasz tételének alkalmazása.)

5. Egy 625×625-ös sakktáblán a középső mezőre szimmetrikusan elhelyezünk 1977 bábut. Bizonyítsd be, hogy a 313. sorban áll bábu! (Arany Dániel versenyfeladat volt.)

6. Hányféle úton juthat el az a1-en álló bástya e6-ra, ha a kerülőút nincs megengedve (azaz: csak felfelé és jobbra haladhat)? (Pascal háromszög.)

7. A c4, d4, f7 mezőkön világos, a d5 és h8 mezőkön sötét figurák vannak. Azt is tudjuk még, hogy a sötét matt helyzetben van. Állapítsuk meg a figurák minőségét! (Tehát azt, hogy melyik a király, a vezér, a bástya stb.) (Indirekt bizonyítási mód.)

8. *A* és *B* fogadnak, a következő feltételekkel:
A sakktábla mezőiből kisorsolnak kettőt; egyikre vezért, a másikra huszárt állítanak. *A* akkor nyer, ha az egyik figura le tudja ütni a másikat, *B* pedig akkor, ha nem tudja leütni. Vajon egyenlők-e az esélyek? (Valószínűségszámítás.)

9. Egy 16 főből álló úttörőraj 21 napig táborozik. Minden délután négy-négy úttörő sakk-körmérkőzést vív.
Bizonyítsuk be, hogy voltak a rajnak olyan tagjai, akik legalább kétszer mérkőztek egymással. („Ki miben tudós?" 1966. évi verseny. Indirekt bizonyítási mód.)

10. Egy négyzet alakú, 1 m²-es céltáblát 65 találat ért. Bizonyítsd be, hogy van két lövés, amely egymáshoz 18 cm-nél közelebb csapódik be! (Skatulya-elv.)

IRODALOM

[1] J. J. GIK: *Sakk és matematika.* Gondolat, Budapest, 1989.
[2] CSÁSZÁR ÁKOS: *Matematikai műveltségeszmény az ezredfordulón.* Műveltségkép az ezredfordulón c. tanulmánygyűjteményben. Kossuth Könyvkiadó, 1980.
[3] DR. JURIJ TOSEV: *A sakkozó pszichogramja.* Magyar Sakkélet, 1974. évf. 1. sz. 12. oldal.
[4] DIRK J. STRUIK: *A matematika rövid története.* Gondolat, 1958.
SZÉNÁSSÚ BARNA: *A magyarországi matematika története.* Akadémiai Kiadó, Bp. 1974.
JERZY GIŻYCKI: *A sakkjáték világa.* Sport, Budapest — Sport i turystyka, Varsó, 1962.
Barcza Gedeon szerk.: *Magyar sakktörténet I—II.* Sport, Bp. 1975. és 1977.
[5] ÚJVÁRI ISTVÁN: *Sakk az iskolában.* Pedagógiai Szemle, 1988. évf. 10. sz. 940—948. o.
[6] *Középiskolai Matematikai Lapok.* 1987. évf. 265. oldal.

JOSSETTE ADDA
Université Paris-7

Harc az iskolai tanulással összefüggő kudarcok elhárításáért a matematika-tantárgy keretében

Az utóbbi néhány évben a címben megjelölt problémakörrel kapcsolatban Franciaországban számos tanulmány keletkezett. Ezek nyilvánvalóvá tették, hogy az oktatási rendszer bármely szintjén az odakerülő diákok sokasága számára az úgynevezett „normális út" végigjárása nem lehetséges.

A függelékben látható (kivonat a [12]-ből) az 1962-ben Franciaországban született gyerekekre vonatkozó statisztika. Ezek szerint „elméletileg normális fokon" folytatta tanulmányait:

7 éves korára a korosztály 72,2%-a,
9 éves korára a korosztály 59,5%-a,
11 éves korára a korosztály 44,1%-a,
13 éves korára a korosztály 34,3%-a,
15 éves korára a korosztály 21,9%-a,
17 éves korára a korosztály 16,1%-a.

(A többiek évet ismételtek vagy perifériális osztálytípusban folytatták tanulmányaikat.) Ez a lecsökkenés elsősorban a szocio-kulturálisan hátrányos helyzetben lévő családok gyermekeit sújtja. Az osztálytípus választásában alapvető felelőssége van a matematika tanításának — és nem a matematikának —, mely befolyásolja a továbbtanulási lehetőséget, s így a szociális egyenlőtlenség újratermelődését eredményezi.

Jól mutatja a matematika tanulása során jelentkező esélyegyenlőtlenséget a következő adatsor. Az 1976—77-es tanévben a megfelelő korosztályhoz tartozó, vezető beosztású dolgozók gyerekeinek 52%-a járt második „C"-be (a „C" típusú osztályok tantervére a matematika túlsúly jellemző), ugyanide a munkásgyerekek 6%-a került be: az ő esélyük a második osztályba kerülésre 91%, illetve 23% [2]. Így nemcsak a középiskola második osztályához vezető út volt messze attól, hogy mindenki számára azonos eséllyel járható legyen, hanem a szociokulturális hátrány 2,2-szer jelentősebb volt a második „C" osztályokban az összes másodikhoz viszonyítva.

A párizsi Műszaki Főiskola 1978—79-es tanév tanulóinak a családfő foglalkozása szerinti vizsgálatából kitűnik [2], hogy a 602 diákból 422 származik „szabadfoglalkozású és vezető beosztású tisztviselő" kategóriából (ez 70%, míg ez a kategória a megfelelő életkorú francia népesség 8,3%-át teszi ki. Az Ecole Normale Superieure-nek ugyanez évben tanuló 21 hallgatójából 12-nek volt legalább az egyik szülője tanár. M. Schiff kifejezése szerint ez „elpazarolt értelmiség".

Röviden összefoglaljuk azokat a kutatásokat, amelyek a PARIS-7 egyetemen (1968-ig a Sorbonne kara) folynak, s célul tűzi ki annak elemzését, *miért* van az, hogy egyes gyerekek kudarcot vallanak, mások sikeresek az iskolai tanulás során. Az elemzés kiterjed arra is, *hogyan* következik be a kudarc, s milyen oktatásbeli változással *kerülhető* el az.

Először is tudatában kell lennünk annak, hogy a gyerekek általában nem a matematikával kerülnek közvetlen kapcsolatba, hanem a matematikához a „matematika tanítása" a közvetítő eszköz. Ez csak a kisebbségnek jelent tényleges közvetítőt, a többségnek szűrőként szolgál, tanulmányozása tehát elkerülhetetlen.

A matematikaórákon a problémák megfogalmazása valójában nem a matematika szaknyelvén, hanem hétköznapi nyelven történik, így számos nyelvi eredetű, rejtve maradó, alattomos (úgynevezett „parazita") nehézség keletkezik. (A közhiedelemmel ellentétben főként *szemantikai*, s kevésbé lexikai vagy szintaktikai szinten jönnek létre.) Ezeket a nehézségeket alaposan elemezte D. Lacombe a Paris-7 egyetemen tartott előadásai keretében. Azonban a kizárólagos

nyelvészeti magyarázat még nem kielégítő. A meg nem értés és a félreértés forrásait a matematika tanár leegyszerűsítő, formalitásokra törekvő magatartásában *(pragmatikusság)*, valamint *retorikájában* is kell keresnünk.

Először is elvontsága miatt a matematika tárgya, amelynek tulajdonságait, kapcsolatait vizsgáljuk, nem látható. (Szemben pl. a természettudományok által tanulmányozott világgal.) A távolság a *jelölt* (a vizsgálandó fogalom) és a *jelölés* (az a jelrendszer vagy szimbólum, amellyel a fogalmat leírjuk) között itt még meghatározóbb szerepet játszik, mint más tudományágakban. A jelölések, pl. a matematikai szimbólumok, ábrák, grafikai megjelenítések annak ellenére szükségesek, hogy a jelölt matematikai fogalmak meg nem értésének forrásai [1], [4], [6], [8]. Tanulmányozva a jelölt-jelölés összezavarása által létrejött félreértést, megállapíthatjuk, hogy nemcsak számos hiba keletkezéséért felelős ez a zavar, hanem a tiszta fogalomhoz való eljutást is lehetetlenné teszi. Például: sok gyerek számára — és tanítókéra is — a halmaz nem létezik „spárga" nélkül, amellyel az elemeket rajzban összekapcsoljuk. Számos középiskolás állítja, hogy a 2 egész, de nem tizedestört, se nem racionális: a 2,00 tizedestört, nem egész és nem racionális; a 4/2 racionális, de nem egész és nem tizedestört.

A matematikai fogalmak másfajta bemutatását képezik a hasonlatok [14], amelyeket a tanárok és tankönyvek alkalmaznak, és a tanulók megélt élményeire hivatkoznak. Majdnem mindig sokkal leegyszerűsítettebbek annál, hogy valóban megfeleljenek egy tetszőleges felismerhető valóságnak, mindazonáltal még túl összetettek ahhoz, hogy ne terheljék meg maguk is számos „parazitával", amelyek eltorlaszolják a matematikához vezető utat.

A matematikai fogalmak elvontságának és általánosságának természetét bemutató feladatok keresése helyett egy abszurd kísérletnek adunk teret az utóbbi években, amelynek lényege „konkréttá tenni a matematikát", és amely elkerülhetetlenül kudarchoz vezet. Az eredeti gondolat — azaz induljunk ki átélt helyzetekből és azokat *„matematizáljuk"*, mert ez motivációt jelent a tanuláshoz — ésszerű volt. Az iskolarendszer korlátai odavezettek, hogy a megélt helyzetek célszerű felhasználása helyett a matematikai kérdéseket látták el szélsőségesen mesterkélt, ál-konkrét *„öltözékkel"*. Ez matematikainak mondott hibák okozója lett, valójában azonban matematikán kívüli az ok. Még az olyan típusú problémák is, mint pl. „a mama kimegy a piacra, s vesz..." kevéssé természetesek, valamint a fizetendő összeg számolása is gyakran eltér attól, mint ami egy tényleges vásárláskor megvalósul (irreális árak, a kereskedelemben használatostól eltérő arányok stb.). Ráadásul ez a „mama-változat" behoz egy olyan érzelmi tényezőt, amely nem szükségszerűen pozitív: pl. akkor, amikor az anyának pénzügyi nehézségei vannak, nincs ideje piacra menni, beteg, távol van, esetleg meghalt... [3]. Az ilyen *iskolai* „problémahelyzet" felvetésekor tanúsított tanulói magatartás lényegesen eltér azokétól, akiknek módja van valós, átélt, mindennapi „problémahelyzet"-ben matematizálni, pl. saját tapasztalatokra szert tenni egy igazi piacon.

F. Cerquetti kutatásai rámutattak arra, hogy pl. a péktanulók amíg a matematikai feladatokat saját szakterületükről kapták (kiflik elkészítésére, azok árusítására vonatkozó számítások), addig jelentős sikerrel oldották meg azokat. Szembehelyezkedtek azonban a feladattal, ha az álprobléma köntösébe bújva került eléjük („word-problems") a tankönyv használata során. Azt is jobban kedvelték, s hatékonyabb munkára késztette őket, ha a problémákkal absztrakt módon, csak a számok nyelvén megfogalmazva találkoztak [9].

A kisgyermekekben meglévő absztrakciós készség jóval nagyobb, mint amennyire az oktatás kihasználja azt. Tény,

hogy azokból lesznek többnyire tanítók, akik ellenszenvvel viseltetnek a matematika iránt, s ez nagy gond Franciaországban. Így jön létre a kudarc áttétele [8], ennek következtében csökken a teljesítmény, ami az egyik legneuralgikusabb pontja oktatási rendszerünknek. (L. F. CARAYOL és M. OLVERA munkáit.) Például egy világos szimbólumrendszer használatát a kisgyerekek tökéletesen elfogadják, mint egyszerűsítő tényezőt (jól ismerték DAVIDOV kísérletei a SZU-ban), ellenben számos, rosszul érthető formalizmust elvetnek a középiskolások: az okok kutatása során majdnem mindig abba ütközünk, hogy a jelölések, amelyekről szó van, összefüggéstelen módon lettek bevezetve, belső ellentmondás van közöttük.

Fontos aláhúzni azt is, hogy a „felöltöztetett" matematikai kérdések, amelyek parazita-hibák létrehozói, nem tekinthetők *„társadalmilag semleges"*-nek: ez is újabb társadalmi szelekció egy összetevőjét képezi [5], [10]. A század elején a feladatok mindenekelőtt a falusi világ felnőtt gazdálkodóira vonatkoztak, akik megművelték birtokukat, átruházták örökségüket, befektettek a gazdaságukba stb. Ma jobban be akarják vonni magukat a gyerekeket. Az iskolai feladatok szövegei gyakran vonatkoznak rájuk, de városi (gyakran fővárosi) gyerekekre, akik ajándékot kapnak, utaznak stb. Így sok gyerek nem ismerheti a kérdés megértéséhez szükséges bizonyos elemeket, ráadásul közülük sokaknál ez az „öltözék" hozzájárul ahhoz az érzéshez (pl. a bevándorlóknál), hogy ők idegenek ebben a világban, amelyet (a tévedés teteje) a matematika világának hisznek. Meglepő látni azokat az alaptípusokat, amelyeket a tanulók fogalmaznak, amikor azt kérik tőlük, maguk találjanak ki feladatszöveget [3].

A segítő kérdések, amelyek a probléma értelmezését szolgálnák, sokszor nem annyira elemzőek, mint inkább a gyerekek közti különbséget fokozzák [7]. A matematikai problémák megfogalmazása és kifejtése ugyanúgy zsákutcába vezet, mint az IQ tesztek, melyeket az utóbbi években olyannyira elítéltek.

Az iskolai kudarc elleni küzdelem a matematika-tantárgy keretében nem a tanterv megváltoztatásának kérdése, hanem az igazi, a mélyebben meghúzódó problémák feltárása és kezelése a feladatunk. S ha nem ezt tesszük, akkor a nehézségek újratermelődhetnek erősebben vagy kevésbé a matematika bármely fejezetétől kezdődően. Ezért van az, hogy az utóbbi évek reformtörekvéseivel kapcsolatban ugyanazokat a kritikai megjegyzéseket tehetjük, mint amelyeket olvashattunk az „Enseignement Scientifique" (Tudományos Oktatás) című folyóirat 1932-ben megjelent számában az akkori helyzetre vonatkozóan.

A tanítóknak tudatára kell ébredniük annak, mik a félreértések és meg nem értések létrehozói. Nemcsak a tanítandó matematika-tananyag kellő mélységű ismerete szükséges, hanem képesnek kell lenniük annak megértésére is, hogyan történik az ismeretek közvetítése a matematikaórán. Tudniuk kell tanulmányozni a tanítványok kulturális, szociológiai hátterét, mert a tanító—diák—matematika kölcsönhatás számos „szociologikai" parazitával veszélyeztetett (P. BOURDIEU terminológiája).

A matematikai kultúrához vezető utat úgy lehetne mindenki számára megnyitni — mint ahogy ezt a sportnál is teszik —, hogy a gyakorlásának öröme és lehetősége mindenkinek megadasson. (A gyakorlást elvontan és intellektuálisan kell érteni! [11].) Voltaképpen itt arról van szó, hogy a matematika tanításával a kulturális örökség egy integráns részét adjuk tovább. Ugyanis a matematikai tételek egyben művészi alkotások is: pl. Pitagorasz-tétele éppen úgy egy klasszikus mű, mint egy Shakespeare darab vagy Leonardo da Vinci kép. Itt is van egy esztétikai gazdagság, amelyet mindenki számára nyújtanunk kell. Szemben azokkal, akik be akarják zárni a hátrányos helyzetű gyerekeket a „hasz-

nos matematikába" (abban az értelemben, hogy a minimális automatizmusokat tanítani a deduktív következtetések gyakorlása nélkül), úgy gondolom, kötelességünk minden gyerek számára megengedni az absztrakcióhoz való jog gyakorlását, amelyhez a matematika tanítása a legjobb alkalom, s amely az emberi szellem egyik legfejlettebb tevékenysége.

Számos matematikus, tudatában a közös felelősségnek tudományáguk oktatásának fennálló gondjai miatt, felismeri, hogy az ő kötelességük reagálni erre a helyzetre. Az iskolai kudarc nem egyszerűen a tanuló kudarca csak, ez az egész oktatási rendszer kudarca, s ha a tanárok megbuknak e kudarc elleni harcban, az ezzel kapcsolatos felelősség azokra száll át, akiknek feladata a tanárok képzése, azaz a felsőoktatásban dolgozókra. A matematikusok közösségének vállalnia kell az iskolával szembeni kötelességet a tanárok képzésében, a tanár továbbképzésében az újabb kutatásokkal a matematika- módszertan területén is, valamint a hátrányos családi környezetből kikerülők szükséges támogatási formáinak javításában.

Tanév	Tanulók száma (ezer)	Életkor	Korát megelőzi	Beiskolázás (általanos iskola és gimn.)						Szakoktatásban továbbtanulók (%)
				elméletileg normál szint	korosztályához képest évvesztes					
					1	2	3	4v+	Σ	
1968/69.	832,6	6	6,9	CP 91,3	1,8	—	—	—	1,8	—
1969/70.	835,3	7	7,0	CE1 72,2	19,3	—	—	—	19,3	—
1970/71.	838,4	8	7,3	CE2 64,3	22,2	4,2	—	—	26,4	—
1971/72.	841,1	9	6,7	CM1 59,5	23,5	6,2	1,0	—	30,7	—
1972/73.	843,1	10	5,4	CM2 55,0	25,8	7,6	1,4	0,3	36,1	—
1973/74.	844,9	11	4,3	6. o. 44,1	34,2	9,5	1,8	0,4	45,9	—
1974/75.	846,2	12	4,5	5. o. 38,8	43,5	5,8	1,4	0,4	51,1	—
1975/76.	846,0	13	4,1	4. o. 34,3	45,5	8,6	0,8	0,3	55,2	—
1976/77.	846,0	14	3,4	3. o. 30,6	27,6	8,7	0,5	—	36,8	21,3
1977/78.	845,3	15	2,6	II. o. 21,9	27,1	5,1	0,4	—	32,6	30,9
1978/79.	844,8	16	2,5	I. o. 17,6	15,4	4,8	0,2	—	20,4	29,8
1979/80.	844,1	17		„Végző" o. 16,1	14,0	3,0	0,3	—	17,3	21,2

Az 1962-es születésű tanulók iskolai pályafutása.

BIBLIOGRÁFIA

[1] J. ADDA: *Travaux sur les difficulties inherentes aux mathematiques et sur les phenomenes d'inconprehension causes et manifestation.* These de doctorat d'etat es es sciences Univ. Paris-7 nov. 1976.

[2] J. ADDA: *Tous egaux devant les mathematiques?* APMEP Chantiers de pedagogie mathematique sept 1980.

[3] J. ADDA: *Quelques aspects de la relation aux mathematiques chez les enfants en situation d'echec scolaire dans enseignement elementaire.* Actes du Colleque "Language et acquisition du langage" Mons sept. 1980.

[4] J. ADDA: *Difficulties with mathematical symbolism: Synonymy and homonymy in visible language* v. Vol. XVI. N° 3 1982. Special issue "Understanding the symbolism of mathematics".

[5] J. ADDA: *L'enseignement des mathematiques n'est pas neutre Actes colloque* PME Anvers juillet 1982.

[6] J. ADDA: *Representation in mathematics Actes colloque* PME. Jerusalem juillet 1983.

[7] J. ADDA: *Pragmatique et questionnements scolaires en mathematiques Actes du colloque "Pragmatics and Education".* Grand mars 1983.

[8] F. CARAYOL: *Comportments d'eleves et de futurs maitres de l'ecole elementaire face a des questions de mathematiques.* These de 3eme cycle Universite Paris-7 1983.

]9] F. CERQUETTI: *Quelconques aspects de la relation aux mathematiques chez des eleves de LEP et de classes partiques.* These de 3eme cycle Universite Paris-7 1982.
[10] A. HARLE: *L'arithmetique des manuels de l'enseignement elementaire francais au debut du XXeme siecle.* These de 3eme cycle Universite Paris-7 1984.
[11] S. LANG: *Des jeunes et des math.* Berlin 1984.
[12] L. LEGRAND: *Rapport "Pour un college democratique",* — La documentation francaişe 1983.
[13] L. SCHWARTZ: *Rapport "L'enseignement et le developpement scientifique"* — La documentation francaise 1981.
[14] W. ZAWADOWSKI (et H. BAUERSFELD): *Metaphors and metonymies in the teaching of mathematics Rencontre* CIEAEM 1981.

Vita

A magyar matematikaoktatás helyzetképe

(1989. augusztus)

1. Előzmények

A matematikatanításban a 60-as években világszerte megindult forradalmi változás nyomán Magyarországon is kísérletek kezdődtek egy hatékonyabb, jobb, általánosabb matematikai képzés, nevelés kialakításáért. A kísérletek és a világban gyűjtött pozitív és negatív tapasztalatok egy radikálisan új, de távlatban megvalósítható általános iskolai tanterv kidolgozásához vezettek. (Bevezetés: 1978.)

A középiskolai reform bevezetését (1978., illetve 1979.) nem előzték meg kísérletek. A fakultációs rendszer tantervei, tankönyvei kipróbálás nélkül kerültek bevezetésre, és tíz év óta tulajdonképpen sehol nem vizsgálják objektív módon a fakultációs rendszer hatását a matematikaoktatásra. Az 1973-ban bevezetett közös érettségi-felvételi vizsgák „elnyelték" a különböző tantervek szerint tanulók tanterv szerinti megmérettetését.

A 79-es gimnáziumi tantervek előtt „felfutó" tagozatos rendszer (matematikából I. és II. tagozat, illetve fizika tagozat emelt szintű matematikával) rendeleti úton úgy töröltetett el, hogy annak eredményeit objektíven sehol senki nem vizsgálta (A 79-es reform előtt alaptanterv szerint 5+4+4+4-es óraszámban tanították a gimnáziumok a matematikát. Az 5 napos iskolai hét bevezetése óta 4+3+3+3 a matematika alapóraszáma, s a III—IV. osztályban erre fakultációban rákerülő 2+2, illetve 4+4 óra sem oldja meg az alapozó évek tarthatatlanul alacsony óraszámát.) A fakultációs rendszerben megmaradt a régi mat. II. tagozat (most spec. mat), de ennek beindítását már nem kötik azok az elvek, amellyel az 1962-ben beindított spec. mat. tagozatot még szervezték (pl. egyetemi matematika-tanszék felügyelete).

1987-re elkészült az általános iskolai és középiskolai tantervek és taneszközök korrekciója. A továbblépéshez szükséges kutatásokat csak egy szűk kutatócsoport végzi (munkájukat lassan ellehetetleníti az intézmények gazdasági és szellemi leépülése).

A pedagógusképzés és továbbképzés nem szolgálja jól a szaktárgy jelenlegi és jövőbeli igényeit. Nincs intézmény, amely azzal foglalkozna, mit és hogyan kellene a XXI. század magyar iskolájának tanítani matematikából. Vannak hagyományok (rosszak többen mint jók), jórossz beidegződések, találkozunk a matematikaoktatást jól segítő menedzserigazgatókkal, lelkes tanárokkal, tehetséges diákokkal, de a 60-as években még remélt forradalmi áttörés elmaradt.

A matematikaoktatás része a mai magyar iskolának, így nem mentes annak általános bajaitól.

Az iskola *általában* nem veszi figyelembe a gyerekek szempontjait: *leadásban* és nem *felvételben* gondolkozik. Nem a gyereket nézi, nem neki akar kaput nyitni a világ ezernyi felfedezésre váró csodájához-, hanem mindenféle tudós szakemberek szerint feltétlenül megtanítandó „alapvetően fontos" ismeretet kíván a fejébe gyömöszölni.

Elképesztően alacsony hatásfok — a szellemi fejlődés számára kárbaveszett évek.

Az iskola másik baja, hogy — nagyjából — mindenkivel ugyanazt akarja elvégezni, elvégeztetni. A fakultációk jelentenek némi differenciálást, de ez túl későn jön és kevés.

A gyerekek különbözőek: az egyiket ez érdekli, a másikat az.

A gyerek egyéniségét, személyiségét és érdeklődését figyelmen kívül hagyó, a tudományosság látszatát keltő és abban tetszelgő tantervek a gyerekek számára érdektelenek és unalmasak, mert megtanulhatatlan kásahegyek. Ne csodálkozzunk tehát, ha az ifjúság elfordul az iskolától.

2. A matematikatanítás helyzete

a) Tantervek, óraszámok, taneszközök

Az óvodai program és az általános iskolai matematika-tanterv megvalósulásának figyelemmel kísérése és segítése mellett szükséges lenne biztosítani folyamatos fejlesztését is.

A fejlesztés legfőbb területei:

— a differenciált igények fokozott kielégítése (tehetséggondozás, gyengék felzárkóztatása),
— a rohamosan fejlődő számítástechnika által kínált lehetőségek értelmes kihasználása és a számítástechnika által felvetett igények kielégítése,
— a feszített, túlzsúfolt tananyag „lazítása" óraszám-átcsoportosítások,
— az általános és középiskolai képzés összehangolása.

A középiskolai és szakmunkásképzős tantervek részben már igazodtak az általános iskolai előzményekhez. Emellett azonban a 12 évfolyam egységes átgondolása, a középiskolai tantervek megújítása egy hosszabb távú kutatómunkát igényel. Erre a munkára alakult az a kutatócsoport, amely kezdetben az MTA Matematikai Kutató Intézet keretében dolgozott a Bolyai Társulat eszmei támogatásával. Később az OPI, végül az OOK jelentette az intézményi hátteret, de a kutatáshoz szükséges minimumért (anyagi és dologi alapokért, kiadványok terjesztéséért) évek óta egyre reménytelenebb harcot folytat a csoport vezetője. Jelenleg a kísérlet folytatása is veszélyben van a feltételek lehetetlensége miatt.

A 8 osztályos gimnázium tanterveit érdemes lenne egy arra alkalmas kutatócsoportnak összeállítani, több iskolában kipróbálni. A 8 osztályos gimnázium alkalmas lenne az általános és középiskolai tantervek még meglévő felesleges átfedéseinek kiküszöbölésére is.

A személyes cselekvő tapasztalatszerzésre építő matematikatanításhoz kezdetben minden általános iskola biztosította — központi keretből — minden gyereknek a szükséges manipulációs munkaeszközöket. Ezt a gyakorlatot nem szabad feladni.

A nyomtatott taneszközök kimunkálása és korrekciója nehéz körülmények között történik. Csekély — legfeljebb 4 hónapos — alkotó szabadságot csupán a tanulói taneszközök megírásához biztosított a szerzőknek a Tankönyvkiadó (illetve a Művelődési Minisztérium). Ez az elmélyült munkához nem lehetett elegendő. A pedagógus munkáját segítő kézikönyvek, segédanyagok kidolgozásához semmiféle szabadságot nem vehetett igénybe a szerző. Ezeknek a körülményeknek is köszönhető, hogy az amúgy is túlterhelt, jó szakemberek nem (vagy legalábbis nem szívesen) vesznek részt tankönyvírásban. (Tehát nem csupán oktatáspolitikai döntés kérdése, hogy az

alsó tagozaton nincsenek alternatív taneszközök!)

Minden iskolatípusban alternatív tankönyveknek kellene megjelenni.

Az eltérő képességű diákoknak más tankönyvekre, munkafüzetre van szükségük. Ki kell dolgozni a matematika tanítását mindegyik képességszint számára. (Alapvetően különböző felépítésű, mélységű és terjedelmű anyagokról van szó!)

A jelenlegi tantervek minden iskolatípusban zsúfoltak. A tananyag sok, ennyit nem lehet értelmesen, gondolkozva elvégezni. A tananyag rosszul van összeválogatva, mert nem eléggé érdekes, jelentős része nem alkalmas a gondolkodásra neveléshez. A felfedeztető tanítás új és nehéz út, már csak a gyerekek különböző gondolkodásmódja és képességei miatt is.

A tantervek megállapításánál a legfontosabbal kellene kezdeni: végig kell gondolni, hogy a matematikát miért tanítjuk. Mi az a matematikából, ami valóban gazdagítja a gyerekeket, és mi az a limlom, amit ki kell dobni. Azt külön meg kell fontolni, hogy mi az, amit mindenkinek meg kell tanulni. A gyengéknek is érdemes, izgalmas, gondolkoztató matematikával kell megismerkedniük. Egy kisebb terepen, egy rájuk szabott területen boldoguljanak, de ez is valódi gondolkodás legyen, ne félig megemésztett (vagy megemésztetlen) módszerek mechanikus ismételgetése.

Minden iskolatípusban tisztázni kell, milyen tekintetben és hogyan kell a matematika-tantárgynak a többi szaktárgy igényeit kiszolgálni.

A jól megválasztott tananyaghoz álljanak rendelkezésre feladatgyűjtemények, ún. szakköri füzetek. A szakkönyvellátás egyre rosszabb, a 70-es évek elején megjelent, a matematika modernebb fejezetét feldolgozó ismeretterjesztő, iskolai feldolgozásra alkalmas kötetek nem hozzáférhetőek. Pedig a tanári önképzés egyik fontos eszköze a szakkönyv, a tehetséges tanulókkal való foglalkozás sem képzelhető el ezek nélkül.

b) A pedagógusok

A tanítók és óvónők szakmai felkészültsége általában nem elégséges. Ez a tény csak kis részben múlik a tanítók, óvónők jó szándékán. A tanítóképzés körülményei, az oda beiratkozó jelöltek érdeklődése (érdektelensége), matematika iránti negatív attitűdje és a képzők oktatóinak a tanító pályához való rossz hozzáállása párosul a képzők erősen maximalista tantervével és a tanítói pálya társadalmi elértéktelenedésével.

A szakmai-, módszertani bizonytalansággal küszködő tanítók nem tudnak felelősen élni az utóbbi évben rájuk hárított szabadsággal. Félő, hogy ez még növeli a pályáról való eltávolodást.

A továbbképzés lehetőségei igen korlátozottak. Általában csak a napi teljes óraszám letanítása mellett, után vehetnek részt a tanítók a továbbképzéseken, az évi egyszeri matematikatanítási vándorgyűlés magas részvételi díját sok esetben fizeti maga a pedagógus — pedig a küldő iskolának, intézménynek is érdekeltnek kellene magát tekintenie, hogy segítse, támogassa a pedagógus szakmai, módszertani fejlődését.

Az önképzésre nemcsak az idő és a túlterhelt tanítók, tanárok ereje kevés. A szakkönyvellátás — már említett — egyre romló színvonala is erőteljesen csökkenti az önképzés lehetőségét. (A pedagógusok számára lényegesen több színvonalas szakkönyvet kellene ingyenesen biztosítani!)

A tanárképzésben és tanár továbbképzésben jobbak a személyi feltételek, de e téren is ijesztő jelnek látjuk a pálya iránti érdeklődés lényeges csökkenését, a jobb képességű hallgatók eláramlását a pedagógus pályáról. Érdemes lenne a matematikatanári egyszakos képzést bevezetni a tudományegyetemeken.

Az intenzív tanító- és tanár továbbképzés bevezetése jó kezdeményezés volt. Azonban olyan kevés pedagógus jut hozzá ehhez a lehetőséghez évente, hogy egy pedagógusra nagy valószínűséggel legfeljebb egyszer kerülhet sor egész aktív

pályafutása alatt. (Ez pedig nyilvánvalóan egyre kevésbé lesz elegendő!)

A pedagógusok anyagi és erkölcsi megbecsülésének hiánya, terhelése, túlmunkára kötelezése általánosabb pedagógus gond. A szaktudás leértékelődése, a pedagógus önbecsülésének romlása, önmagával és diákjaival szembeni eligénytelenedése azonban legalább ugyanolyan súlyos figyelmeztető jelek a pedagógusközérzet romlására, mint a gyakrabban emlegetett anyagi követelések.

A tanári szabadságot sokat és sokszor emlegetik mostanában. A tanári szabadságot csak deklarálni nem elég. A heti 25—30 órában tanító tanár nem képes önálló tanterveket kidolgozni, nincs szellemi kapacitása a kísérletezéshez. Képzettsége és felkészültsége alapján nem tudja a matematikatudományból a matematika-tantárgyat megalkotni. Pedagógiai módszerek kipróbálásához koncentrált szellemi kapacitásra pedagógiai tudományos műhelyre van szükség. Jó lenne, ha a tanító- és tanárképző intézményekben (mellett) kialakulnának azok a szellemi műhelyek, amelyek a matematikatanítás új útjait kipróbálnák. A gazdag kínálatból válasszon a tanár! Ha önálló alkotó munkára képes, tehesse meg, de szabadságot adni csak a lehetőségek szélesítésével lehet.

A tanári szabadság lehetősége abban is mutatkozzon meg, hogy a tanárnak legyen szabad osztályonként rövidítenie, bővítenie a tananyagot aszerint, hogy a gyerekek pillanatnyi szellemi fejlődését mi szolgálja a legjobban.

A tanári szabadságot kiszélesítenék az egyes iskolatípusokban különböző évfolyamokban megiratott ún. szintfelmérő dolgozatok. A követelmények teljesítésének objektív mérésére mind a tanárnak mind a diáknak nagy szüksége van.

Nevelési követelmény legyen minden iskolatípusban, hogy a tantervi követelményt nem teljesítő tanuló ne léphessen magasabb osztályba. Jó lenne, ha tanévismétlés nem büntetésnek tűnne. Ehhez azonban a társadalmi megértést is ki kellene alakítani.

c) Oktatásirányítás, tudományos kutatás

Az elmúlt év folyamán erőteljesen fogalmazódott meg az oktatásirányítás decentralizálásának elképzelése. Nem látjuk azonban eléggé átgondoltnak, megalapozottnak ezt az elképzelt lépést. Sem a pedagógusok, sem a megyei, kerületi pedagógiai intézetek irányító szakemberei nem vállalhatják magukra, hogy a jövő igényeit kellően átlátva maguk alakítsák ki az általános képzés anyagát. Szakmai felkészültségük szerint és szelés munkakörük alapján más — nem kevésbé fontos — területre érvényes a kompetenciájuk.

A tantervekkel, a hozzájuk szükséges taneszközök gondozásával, kimunkálásával, kipróbálásával, a tanítás hatékonyságának mérésére és fokozására vonatkozó kutató munkával — megítélésünk szerint — a jelenleginél nagyobb és szélesebb lehetőségekkel rendelkező kutató csoportnak kell foglalkoznia.

3. Elképzelések a matematikaoktatás helyzetének javításáról

a) Keresni kell a pedagógus-képzés és -továbbképzés jobb és hatékonyabb lehetőségeit. Ehhez elsősorban meg kell fordítani a tudás leértékelődésének folyamatát, és el kell érni az oktatás és a tudomány növekvő költségvetési támogatását.

b) Javítani kell a pedagógus élet- és munkakörülményeit.

c) El kell érni, hogy a matematikatanítás egészére vonatkozó tudományos kutatásokban, a tantervek fejlesztésében, taneszközök kimunkálásában elegendő szellemi és anyagi eszközzel rendelkező kutatócsoport dolgozhasson.

Az anyagot összeállította a Bolyai János Matematikai Társulat Oktatási Bizottsága tagjainak valamint a társulati Rátz László Vándorgyűlés résztvevőinek véleménye alapján

C. Neményi Eszter és *Békefi Zsuzsa*

Ötletsarok

RADNAINÉ SZENDREI JULIANNA
OPI
Budapest

Két gemkapocs

Előjáték

Ezzel a feladattal egy konferencia szünetében ismerkedtem meg, amikor a résztvevők különféle feladatokkal szórakoztatták egymást.

A feladat a következő. A boríton látható módon hajtsunk össze egy papírlapot és tűzzük össze két gemkapoccsal. Húzzuk szét a lapot, nézzük meg, hogy mi történt.

Kérek mindenkit, ha csak teheti gyorsan keressen két gemkapcsot, mert úgysem hihető az, amit most leírok.

A gemkapcsok összekapcsolódnak.

Ha lassan végezzük a mozgást, akkor értjük, hogy a papírlap segíti a kapcsok nyitódását és összekapaszkodását.

Első variáció

Nagyon tetszett a feladat, de belegondoltam, hogyan lehetne ezt osztálykeretben még izgalmasabbá tenni.

Kitaláltam a következő helyzetet. Felmutatom a két gemkapcsot, az összehajtogatott papírlapot, betűzöm a kapcsokat és azt mondom:

„Próbáljátok megbecsülni, hogyha hirtelen szétrántom a papírlap két szélét, akkor a két gemkapocs a teremben milyen messzire repül majd egymástól."

A dolog mindig beválik. Két centiméter, két méter, 10 méter és nulla méter tippek hallatszanak. A tréfában az a nagyszerű, hogy az, aki nem sejtette meg, hogy a két kapocs össze fog akaszkodni, a 0 méter hallatán csak azt hiszi, hogy társa úgy gondolja, a kapcsok majd külön egymás mellett hullanak le a földre (persze néha ilyen gondolat is adódik).

Ezután egy rántás — és máris halljuk a csodálkozás zaját. A szokásos menet: néhányan kiszaladnak, megtapogatják a gemkapcsokat. Nincs-e csalás a dologban. Árgus szemekkel figyelik a lapot és természetesen megújrázzák a mutatványt.

Ismétlés; az eredmény ugyanaz.

Megkérdezik, hogy számít-e az, hogy a papírba hogyan tűzöm bele a gemkapcsot. Megpróbáljuk. Nem függ ettől a mutatvány sikere.

Természetesen ők is többször megcsinálják.

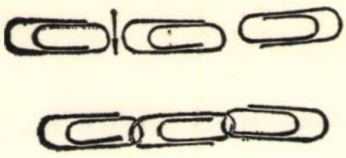
Sikerül. Elárulom, hogy külön erre a célra mindig beviszek egy doboz gemkapcsot és néhány papírlapot.

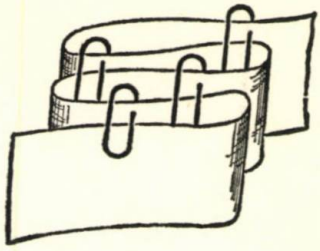
Sikerül. Sikerül.

Arra gondoltam, hogy miért ne lehetne ugyanezt több gemkapoccsal is megcsinálni. Mondjuk háromszor hajtjuk a lapot, és úgy kapcsoljuk őket össze.

Mi történik a kapcsokkal, ha szétrántom a lapot? (Első jótanács: célszerű elég rugalmas gemkapcsokat használni, mert néha szétnyílnak a rángatás következtében és akkor oda a siker.) (Ábra a borítón.)

Ezt látjuk majd:





Folytathatjuk a feladatot négyszeres hajtás és négy gemkapocs esetére.

Ezt kapjuk:

Tetszés szerint növelhetjük a hajtások számát. Természetesen egy idő után már nem érdemes folytatni, mert a gyerekek elveszítik érdeklődésüket. (Persze biztosan néhányan közülük otthon majd bemutatják, játszanak még vele.)

Átvirrasztott éjszakák

Körülbelül eddig jutottam a feladatbokorral, amikor hirtelen belém állt a gondolat, hogy meg kellene próbálni szétnyitni két összekapcsolt gemkapcsot *ugyanezzel a módszerrel.*

Természetesen a gondolat kicsit bizarr, hiszen nem az inverz műveletről van itt szó (aminek szintén nem feltétlenül kellene eredményt adnia.)

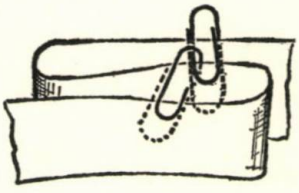
A kérdés tehát az, hogy ugyanazzal a művelettel, amivel összekapcsolhatjuk a két gemkapcsot, szét lehet-e nyitni két eleve összekapcsolt darabot.

Mindenki ismeri azt az érzést, amikor egy feladat nem hagyja szabadulni. Annyira erősen hittem benne, hogy a feladat megoldható, hogy néha már ismét világos lett, mire abbahagytam. Természetesen itt már nemcsak a matematika okozott nehézséget, hanem a tárgyi világ is. Hegyes volt a gemkapocs, gyenge a papír stb.

Ám a második éjszaka siker koronázta a próbálkozást. Szétváltak a kapcsok. (Természetesen éppen akkor, amikor nem jegyeztem fel pontosan a kiinduló helyzetet.) De ekkor erőt adott a továbbiakhoz, hogy *van* megoldás. Így azután hamarosan ismét sikerült. Azt javaslom, hogy inkább egy anyag-szalag segítségével próbálják ki ezt a változatot.

A gemkapocs se legyen túl hegyes.

Az ábrák mutatják azt, hogyan kell az összekapcsolt gemkapcsokat a szalagba beletűzni a széthúzás előtt.



Kicsit tartani is kell a kapcsokat, hogy le ne csússzanak. Bemutató előtt érdemes sokszor gyakorolni.

Három gemkapocs szétválasztásával már nem próbálkoztam... Remélem okoz majd néhány vidám percet ez a feladat Önöknek és tanítványaiknak.

Váljék egészségükre.

Ára: 7,— Ft

Főiskolai oktatók tanácskozása

A műszaki főiskolák matematika, fizika és számítástechnika oktatóinak idei, sorrendben 13. országos tanácskozását a Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskola rendezte meg 1989. június 14-én, 15-én és 16-án Székesfehérvárott a Technika Házában.

A tanácskozáson 19 főiskola és főiskolai kar 94 oktatója vett részt, közöttük első ízben az ELTE Tanárképző Főiskolai Karának 3, a Berzsenyi Dániel Tanárképző Főiskola 6, valamint a BME Fizikai Intézetének 2 oktatója.

A tanácskozást dr. Vágó István egyetemi tanár, a KKVMF főigazgatója nyitotta meg, majd Gartay István a Székesfehérvár Városi Tanács titkára köszöntötte a résztvevőket.

Az első nap plenáris ülésén dr. Császár Ákos akadémikus, az Eötvös Loránd Tudományegyetem egyetemi tanára *Közeli halmazok,* majd dr. Szegő Károly, a fizikai tudományok doktora, a Központi Fizikai Kutató Intézet tudományos igazgatója *A Halley-üstökös kutatási eredményei* címmel tartott előadást.

A tanácskozás második napján két szekcióban folytatódott a szakmai program.

A *Számítástechnika és matematika* szekcióban elhangzott 8 előadás elsősorban a számítástechnika oktatásában és a számítástechnikának a matematika és fizika egyes fejezetei oktatásában lehetséges alkalmazások terén elért eredményekről és problémákról szólt, de megcsodálhattuk az alkalmazások egy kézzel fogható eredményét, a MIKROBI robotmodellt is.

A *Matematika és fizika* szekcióban is 8 előadás szerepelt a programban, és ezek többsége az oktatás hatékonyabbá tételére tett javaslatokat. Itt esett szó az 1988-ban Magyarországon megrendezett ICME-6 nemzetközi Matematikatanítási Kongresszus tapasztalatairól is.

A Poszterszekcióban 14 poszter kapott helyet. A szerzők többsége a számítástechnika elméleti és gyakorlati alkalmazásáról mutattak be egy-egy példát.

Az utolsó nap plenáris ülésén három előadás hangzott el, nevezetesen Kalmár Sándor főiskolai tanár *A gyors Hartley transzformációról,* dr. Ronyec József főiskolai tanár *Egy „fizikomatematikus" útja Fehérvártól a világhírnévig* és dr. Selmeczi Kálmán főiskolai tanár *A relativitáselmélet úttörői* című előadása.

A konferencia alatt több számítástechnikai cég új számítástechnikai eszközöket és programokat mutatott be.

A második nap délutánjára szervezett kiránduláson a környék helytörténeti nevezetességeivel ismerkedhettek meg a konferencia résztvevői.

A Kerekasztal beszélgetés során a résztvevők az idei konferenciát is mind tudományos, mind módszertani, mind tapasztalatcsere szempontjából nagyon hasznosnak tartották és az összejövetelek további folytatásában állapodtak meg. Az 1990. évi, sorrendben 14. konferenciát a Pénzügyi és Számviteli Főiskola Zalaegerszegen rendezi előreláthatólag június első hetében.

dr. Scharnitzky Viktor